# Estimation des paramètres d'un sinus glissant par Transformée de Fourier Fractionnaire

Gilles GONON[1], Claude DEPOLLIER[2]

[1]Laboratoire d'Informatique
Université du Maine, 72085 Le Mans Cédex 9, France

[2]Laboratoire d'Acoustique, UMR CNRS 6613
Université du Maine, Avenue Olivier Messiaen, BP 535, Le Mans Cédex 9, France
Gilles.Gonon@lium.univ-lemans.fr, Claude.Depollier@univ-lemans.fr

**Résumé** – La Transformée de Fourier Fractionnaire (notée **FRT**), introduite par Namias en 1980, permet une analyse des signaux dans des domaines intermédiaires entre les domaines temporel et fréquentiel. Suivant un angle donné du plan temps fréquence, elle décompose le signal sur une base orthogonale de sinus glissants. Elle est donc adaptée à l'analyse de signaux multicomposantes formés de sinus glissants et permet une estimation robuste au bruit de la pente et de l'offset qui sont les deux paramètres essentiels des sinus glissants.

**Abstract** – The fractionnal Fourier Transform (**FRT**), introduced by Namias in the early 80, offers new analysis of the signal in intermediate domains between the temporal and the frequential ones. Given an angle in the time frequency plane, it expands the signal on a linear chirp orthogonal basis. Thus, it is clearly adapted to the analysis of multichirp signals allowing extraction of the slope and the offset of linear chirps in noise.

## 1 Introduction

L'estimation des paramètres des signaux à phase polynomiale se retrouve au centre de nombreuses applications du traitement du signal, comme l'analyse de signaux radar, sonar ou dans les applications biomédicales. Le "chirp linéaire" (signal dont la fréquence dépend linéairement du temps) est un cas particulier de ces signaux FM couramment utilisé pour calibrer ou caractériser les systèmes de mesures.

L'analyse temps fréquence est une technique importante pour l'étude des signaux non stationnaires. Plus spécifiquement la distribution de Wigner-Ville est bien adaptée au cas des chirps linéaires. Toutefois, les termes d'interférences causent des difficultés qui s'ajoutent aux effets du bruit corrupteur du signal pour l'interprétation des spectres des signaux multicomposantes. Il est alors nécessaire de recourir à des methodes qui, localement, mettent en évidence les concentrations du signal et facilitent ainsi la lecture des spectres.

La méthode proposée dans ce travail est basée sur la Transformee de Fourier Fractionnaire (FRT). La FRT est une généralisation de la Transformée de Fourier qui présente des propriétés interessantes en relation avec les representations dans le plan temps-fréquence (TF) des signaux. Plus spécifiquement, la FRT est liée à la transformée de Radon et permet ainsi une exploration du plan TF par projection des motifs du plan sur des droites de pentes variables passant par l'origine.

Nous présentons ici une méthode pour l'estimation des paramètres d'un signal MF dont la fréquence varie linéairement avec le temps. Il est clair toutefois que cette méthode peut être développée pour d'autres applications qui font intervenir la transformée de Radon des distributions temps-fréquence.

## 2 Transformée de Fourier Fractionnaire

### 2.1 Notations

L'opérateur de la FRT d'ordre $\alpha$ est noté $\mathcal{F}_\alpha$ et la transformée d'une fonction $S(t)$ notée $S_\alpha(t_\alpha)$, où $t_\alpha$ est l'unité duale du temps dans le domaine transformé. L'ordre $\alpha$ correspond à l'angle $\phi = \alpha\frac{\pi}{2}$. La FRT est alors définie pour $\alpha \in [0,4]$ par la relation

$$\mathcal{F}_\alpha[S(t)] = S_\alpha(t_\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{K}_\alpha(t_\alpha, t) S(t)\, dt \quad \text{et} \qquad (1)$$

$$S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{K}_{-\alpha}(t_\alpha, t) S_\alpha(t_\alpha)\, dt_\alpha \qquad (2)$$

où $\mathcal{K}_\alpha(t_\alpha, t)$ est défini par :

$$\mathcal{K}_\alpha(t_\alpha, t) = \begin{cases} A_\phi\, e^{i\pi((t_\alpha^2+t^2)cot\phi - \frac{2t_\alpha t}{\sin\phi})} & si\ \phi \neq n\pi, n \in Z \\ \delta(t - t_\alpha) & si\ \phi = 2\pi n \\ \delta(t + t_\alpha) & si\ \phi + \pi = 2\pi n. \end{cases} \qquad (3)$$

avec

$$A_\phi = \frac{\exp\left(-j\pi sgn(\sin\phi/4) + j\phi/2\right)}{|\sin(\phi)|^{1/2}} \qquad (4)$$

Les opérateurs $\mathcal{F}^0$, $\mathcal{F}^1$qui agissent sur les fonctions $S(t)$ sont respectivement l'identité et l'opérateur Transformée de Fourier. Ils correspondent dans le plan temps-fréquence aux rotations de 0 et $\pi/2$. En généralisant cette interprétation, $\mathcal{F}^\alpha$ est l'opérateur qui, lorsqu'on l'applique à $S(t)$, donne une représentation de ce signal dans le plan TF le long d'une droite faisant un angle de $\phi = \alpha\pi/2$ avec l'axe du temps. Toujours dans cette logique $\mathcal{F}^2$ (resp. $\mathcal{F}^3$) correspond à l'opérateur renversement du temps (resp. des fréquences).

## 2.2 Propriétés

Les propriétés de la FRT se déduisent de celles des fonctions noyaux $\mathcal{K}_\alpha$. Parmi les plus importantes pour l'interprétation de la FRT comme opérateur de rotation dans le plan TF, on peut citer

-la continuité en $\alpha$ qui assure le passage continu du domaine temporel au domaine fréquentiel;

-la commutativité : $\mathcal{F}^{\alpha_1}[\mathcal{F}^{\alpha_2}[S(t)]] = \mathcal{F}^{\alpha_2}[\mathcal{F}^{\alpha_1}[S(t)]]$;

-la composition : $\mathcal{F}^{\alpha_1}[\mathcal{F}^{\alpha_2}[S(t)]] = \mathcal{F}^{\alpha_1+\alpha_2}[S(t)]$;

-l'orthogonalité des noyaux.

La FRT vérifie l'identité de Parseval qui assure la conservation d'énergie entre un signal et sa transformée, condition nécessaire et suffisante pour les problèmes de reconstruction du signal.

Parmi ces propriétés, la plus intéressante est sans doute la continuité des fonctions noyaux en $\alpha$ car c'est elle qui va permettre un balayage angulaire continu du plan temps fréquence. Ainsi, l'analyse par FRT à différents angles permet de voir un signal évoluer depuis son allure temporelle jusqu'à son allure fréquentielle. La figure 1 montre ainsi la transformation d'une porte temporelle en un sinus cardinal de manière continue. Il est toutefois à noter, puisque l'on travaille en discret, l'apparition d'un phénomène similaire au phénomène de Gibbs de la Transformée de Fourier pour des angles faibles (l'approximation de la porte est limitée par la fréquence d'échantillonnage).

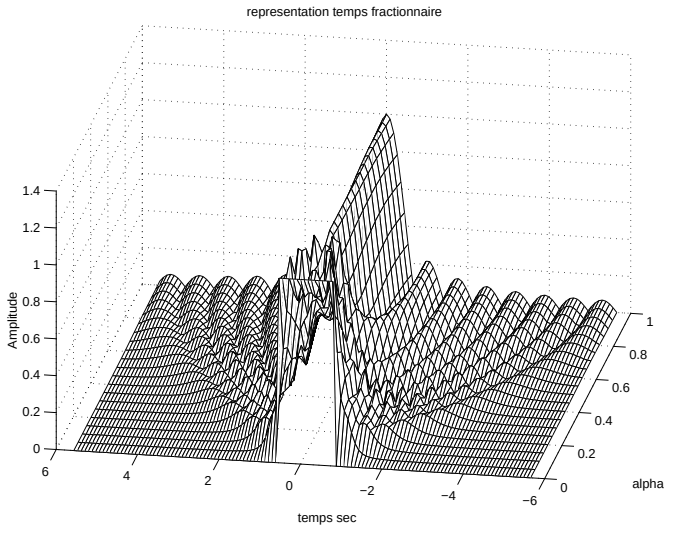


FIG. 1: FRT d'une porte à différents angles illustrant le passage continu du domaine temporel au domaine fréquentiel.

## 2.3 Relation avec la transformée de Radon

La FRT est reliée aux transformées temps fréquence et à la transformée de Radon. La transformée de Radon de la fonction $f(x, y)$ est définie par la relation :

$$\mathcal{R}[f(x,y)] = \int f(r\cos\phi - s\sin\phi, r\sin\phi + s\cos\phi)ds$$

où $(r, s)$ sont les nouvelles coordonnées déduites de $(x, y)$ par rotation de l'angle $\phi$. On montre que la FRT associée à l'angle $\phi = \alpha\pi/2$ est liée à la transformée de Radon de la distribution de Wigner-Ville $\mathcal{W}_S(t,\omega)$ par :

$$\mathcal{R}[\mathcal{W}_S(t,\omega)](t_\alpha) = |S_\alpha(t_\alpha)|^2 \qquad (5)$$

Cette relation traduit différemment le fait que la WVD de $S_\alpha$ est obtenue par rotation de la WVD de $S$. Elle montre aussi que la projection de la WVD de $S$ sur la direction $\phi = \alpha\frac{\pi}{2}$ est le module au carré de la FRT de $S$ suivant l'angle $\phi$.

# 3 Analyse des sinus glissants

## 3.1 Calcul théorique

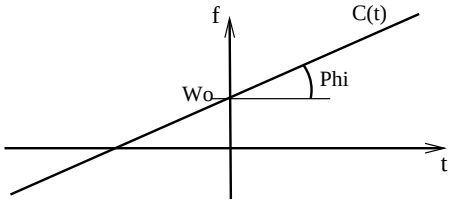


FIG. 2: Représentation théorique dans le plan temps fréquence d'un chirp linéaire

Le sinus glissant ou "chirp linéaire" a pour représentation temporelle l'expression $\mathcal{C}(t) = e^{i(\omega_0 t + \tan\phi t^2)}$. Dans le plan Temps-Fréquence sa représentation est une droite dont l'abscisse à l'origine est $\omega_0$ et dont la pente est $\tan\phi$. Les deux paramètres sont illustrés par la figure 2 qui représente un chirp linéaire dans le plan temps fréquence.

En calculant la FRT d'ordre $\alpha + 1$ du chirp, on effectue la projection orthogonale de cette droite suivant une direction qui lui est perpendiculaire espèrant ainsi obtenir un pic de Dirac. Le résultat théorique (6) calculé à partir de l'équation (1) de la transformée d'un chirp linéaire confirme bien cette idée. On trouve en effet :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\alpha+1}(t_{\alpha+1}) = \quad & A_{\phi+\frac{\pi}{2}}\ \cos\phi\, e^{-(i\pi\tan\phi\, t^2_{\alpha+1})} \\ & .\delta(t_{\alpha+1} - \tfrac{\omega_0\cos\phi}{2}).\end{aligned} \qquad (6)$$

De cette expression se déduit d'une part une estimation de la pente du chirp, et d'autre part la valeur de la fréquence $\omega_0$ donnée par la position du dirac en $t_{\alpha+1} = \frac{\omega_0\cos\phi}{2}$. La figure 3 montre la FRT d'un chirp linéaire pour différents angles, jusqu'à la formation d'un pic de Dirac lorsque l'angle de la transformée est orthogonal à la pente du chirp.

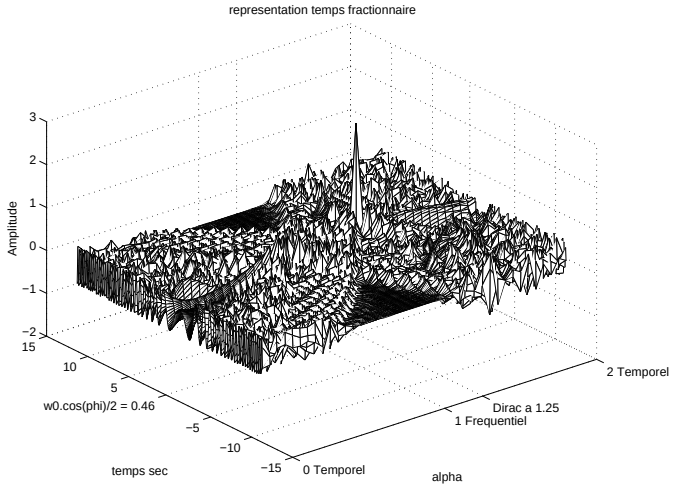


FIG. 3: FRT d'un chirp linéaire de pente $\tan(\alpha_0\pi/2)$ où $\alpha_0 = 0.25$ et d'offset $\omega_0 = 1$ pour $\alpha \in [0, 2]$. Mise en évidence de l'apparition du pic de Dirac pour un angle $(\alpha_0 + 1)\frac{\pi}{2}$ correspondant ici à $\alpha = 1.25$.

## 3.2 Signal Fenêtré

Il est aussi intéressant de chercher l'influence d'une fenêtre de pondération sur le résultat précédent. Le résultat (7) présente ici le cas d'une fenêtre rectangulaire mais les conclusions s'étendent facilement aux autres formes de fenêtres car dans le domaine $\alpha + 1$, la fonction Dirac résultant de l'équation (6) se trouve convoluée par la TF de la fenêtre. L'information sur la position temporelle de la porte peut se retrouver sur la phase de la TF qui subit un déphasage linéaire proportionnel à la position du centre de la porte. Cela suppose cependant que la phase a pu être déroulée correctement. La FRT d'un chirp linéaire fenêtré s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\alpha+1}[S(t)](t_{\alpha+1}) = \quad & A_{\phi+\frac{\pi}{2}}.\cos\phi \\ & .\frac{\sin 2\pi T'(t_{\alpha+1}-\frac{\omega_0\cos\phi}{2})}{2\pi(t_{\alpha+1}-\frac{\omega_0\cos\phi}{2})} \\ & .e^{-i\pi(t_{\alpha+1}^2\tan\phi+(t_{\alpha+1}-\frac{\omega_0\cos\phi}{2})2k')}\end{aligned} \tag{7}$$

Cette équation (7) donne le résultat de base pour l'analyse des sinus glissants par FRT. La détection et la localisation de sinus glissants sont donc possibles lors de l'analyse par FRT. L'analyse consiste en un balayage angulaire permettant de détecter la présence de sinus glissants. Les sinus cardinaux obtenus donnent deux informations sur le signal. La première sur la pente du sinus glissant est déduite de l'angle auquel est effectuée la transformée. La seconde sur la longueur temporelle est déduite de l'étalement des lobes du sinus cardinal qui s'annulent en théorie tout les $\frac{\cos\phi}{T}$. Enfin, il est possible d'obtenir la localisation temporelle du sinus glissant à partir de la phase de la transformée. La phase attendue est une parabole dont le sommet situé en $t_{\alpha+1} = \frac{k}{\sin\phi}$ permet de déduire $k$ qui indique la position du centre de la fenêtre.

La figure 4 illustre les estimations qui ont été réalisées sur un chirp linéaire de pente $\alpha = 0.25$ ($\phi = \alpha\pi/2$), d'offset $\omega_0 = 1$ ( la fréquence d'échantillonnage normalisée est $Fe = \sqrt{N}$). Ce chirp est fenêtré par une fenêtre rectangulaire de longueur 8 en temps normalisé centrée en 1,96. Les valeurs indiquées en pointillés sont les valeurs trouvées par le calcul théorique pour ce qui est de la position du lobe principal du sinus cardinal fournissant l'offset, de l'espace inter-lobes fournissant la longueur de la fenêtre et du sommet de la parabole de phase fournissant la position du centre de la fenêtre. Elles correspondent bien à celles fournies par les simulations.

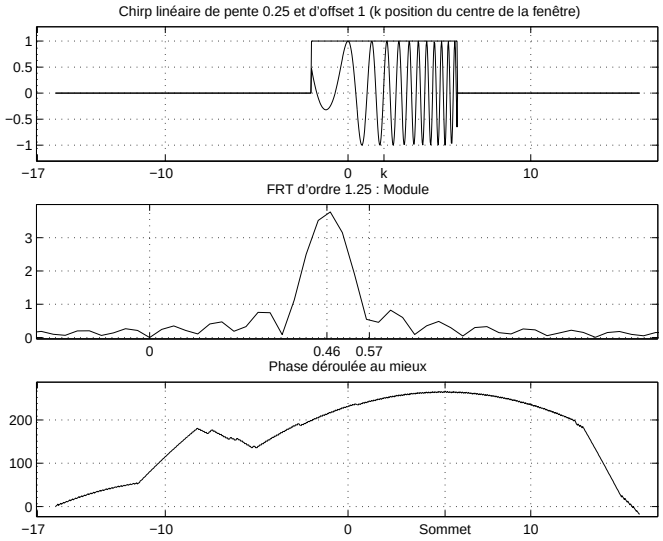


FIG. 4: FRT d'ordre $\alpha = 1.25$ d'un chirp linéaire de pente $\tan\phi = \sqrt{2} - 1$ ( correspondant ã $\alpha = 0.25$) et d'offset $\omega_0 = 1$. En l'absence de bruit il est possible d'estimer l'offset du chirp puis la position du centre et la longueur de la fenêtre.

## 3.3 Simulation et résistance au bruit

Nous nous intéressons maintenant au cas d'un signal multicomposante, pour voir si la FRT permet de pallier aux problèmes d'interférences survenant avec d'autres transformée temps fréquence comme la distribution de Wigner-Ville.

Le signal analysé consiste en trois sinus glissants de pentes et de longueurs différentes. Le principe d'analyse consiste en un balayage angulaire entrainant l'apparition de sinus cardinaux se distinguant nettement des autres formes de transformées permettant d'estimer directement la pente des chirps détectés.

Dans un contexte bruité, il est très difficile d'estimer les paramètres sur la position et la nature de la fenêtre mais l'estimation des paramètres propres au chirp reste très robuste au bruit. Nous avons effectué les tests sur signal fortement bruité.

La figure 5 montre la distribution temps-fréquence du signal de simulation, sans bruit. Il est composé de 3 chirps linéaires de pentes correspondant aux ordres $-0.65$, $0.05$ et $0.4$.

Nous avons ensuite ajouté un fort niveau de bruit de manière trouver la limite de détection de la méthode par balayage angulaire. La limite est atteinte pour un RSB

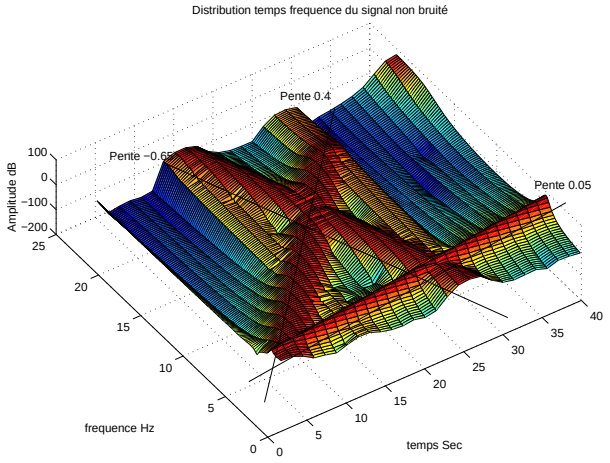


FIG. 5: Distribution dans le plan temps fréquence du signal de simulation composé de trois chirps linéaires de longueur et de pentes différentes.

de l'ordre de -10dB (dix fois plus de bruit). Alors, seul deux des chirps sont distinguables, le troisième étant noyé dans le bruit. Les figures 6 et 7 montrent les résultats des balayages angulaires dans les zones où apparaissent les sinus cardinaux correspondant aux transformées des chirps de pentes 0.05 et 0.4.

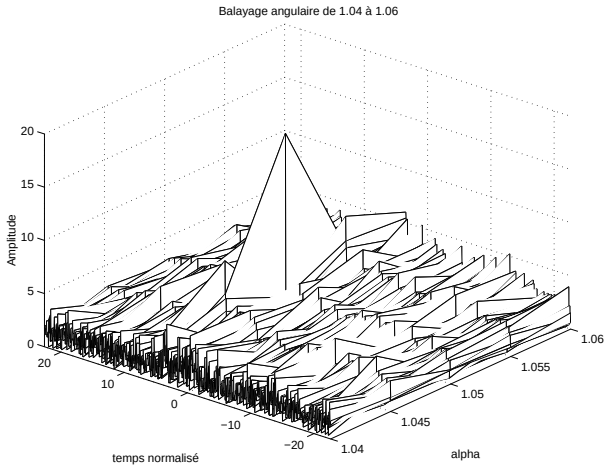


FIG. 6: Visualisation des FRT obtenues par balayage angulaire pour $\alpha \in [1.04, 1, 06]$.

Les deux chirps de pentes -0.65 et 0.05 sont facilement détectables (nous ne montrons ici le résultat que pour le chirp de pente 0.05) mais celui de pente 0.4 est noyé dans le bruit et il est alors difficile de distinguer le sinus cardinal du bruit environnant. La limite de détection est imposée par la longueur des fenêtres utilisées pour chaque chirp. L'amplitude des sinus cardinaux est en effet proportionnelle à la longueur de chaque fenêtre.

# 4 Conclusion

La Transformée de Fourier Fractionnaire est un outil efficace pour étudier la structure des représentations dans le plan temps-fréquence des signaux non stationnaires et

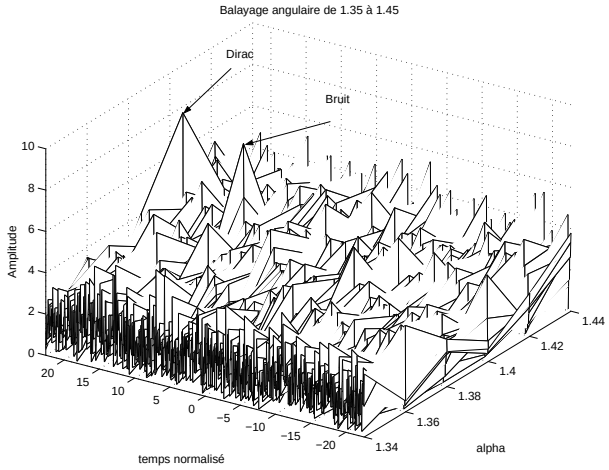


FIG. 7: Visualisation des FRT obtenues par balayage angulaire pour $\alpha \in [1.3, 1.4]$.

multicomposantes. Elle conduit aux mêmes résultats que la transformée de Radon des distributions temps fréquence sans passer par l'étape du calcul de ces distributions prodiguant ainsi à l'analyse un gain en temps de calcul non négligeable.

# Références


[1] Victor Namias. The fractional order fourier transform and it's application to quantum mechanics. *J. Inst. Maths Applics*, (25):241–265, January 1980.

[2] A. C. McBride and F. H. Kerr. On namias's fractional fourier transform. *IMA Journal of Applied MAthematics*, (39):159–175, August 1987.

[3] Ozaktas et al. Digital computation of the fractional fourier transform. *IEEE Trans. on signal processing*, 44(9):2141–2150, September 1994.

[4] Luís B. Almeida. The fractional fourier transform and time-frequency representations. *IEEE Transaction on signal processing*, 42(11):3084–3091, November 1994.

[5] J. García, D. Mas, and R. G. Dorsch. Fractional-fourier-transform calculation through the fast-fourier-transform algorithm. *Applied Optics*, 35(35):7013–7018, December 1996.

[6] Kutay, Ozaktas, Arikan, and Onural. Optimal filtering in fractional fourier domains. *IEEE Transaction on signal processing*, 45(5):1129–1143, May 1997.

[7] Gilles Gonon. La transformée de fourier fractionnaire. Master's thesis, Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine, 1998.

[8] H. M. Ozaktas and Orhan Aytür. Fractional fourier domains. *Signal Processing*, (46):119–124, May 1995.

[9] Jianwen Hua, Liren Liu, and Guoqiang Li. Extended fractional fourier transforms. *J. Opt. Soc. Am. A*, 14(12):3316–3322, December 1997.

[10] Soo-Chang Pei and Min-Hung Yeh. Improved discrete fractional fourier transform. *Optics Letters*, 22(14):1047–1049, July 1997.