

Rapport de stage de DEA
La Transformée de Fourier Fractionnaire

Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine
UMR CNRS 6613

Présenté par:
Gilles Gonon
Encadré par:
Claude Depollier

30 avril 2002

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Un peu d'histoire	1
1.2	Objectifs	2
2	Présentation théorique	3
2.1	Définition	3
2.1.1	L'approche de Namias	3
2.1.2	Représentation intégrale	4
2.2	Propriétés	5
2.2.1	Propriétés directes	5
2.2.2	Autres propriétés	5
3	Application au traitement du signal	9
3.1	Les résultats importants	9
3.1.1	Notations	9
3.1.2	Rappels sur les transformations intégrales	10
3.1.3	Identité de Parseval	11
3.1.4	Relation entre les différentes transformées	12
3.2	Implémentation de l'algorithme	14
3.2.1	Problèmes de normalisation des unités	14
3.2.2	Première méthode	15
3.2.3	Deuxième méthode	16
3.3	Tests des algorithmes	17
3.3.1	Validation	17
3.3.2	Test sur les signaux usuels	17
3.3.3	Complexité et comparaison des algorithmes	18
3.4	Applications	18
3.4.1	Filtrage dans le domaine fractionnaire	18
3.4.2	Analyse des sinus glissants	21
3.5	Extension à la transformée en échelle Fractionnaire	26
3.5.1	Présentation de la transformée en échelle	26
3.5.2	Proposition pour la transformée en Echelle Fractionnaire	27
4	Autres domaines d'applications	29
4.1	Traitement du signal	29
4.2	De l'Optique à l'Acoustique	29
4.3	Autres domaines	30

5	Conclusion	31
A	Transformées des signaux usuels	33
A.1	FRT des fonctions propres $e^{-\frac{x^2}{2}} \mathcal{H}_n(x)$	33
A.2	FRT du sinus et du cosinus	33
A.3	FRT d'un sinus glissant	35
A.4	FRT d'une porte	35
B	Exemple de résolution analytique d'une équation différentielle par FRT	37
C	Listing des programmes	39
C.1	Algorithmes et fonctions	39
C.2	Programmes Tests sur la FRT	47

Table des figures

2.1	La FRT vue comme une rotation dans le plan Temps Fréquence	4
3.1	Effet de la Transformée de Radon dans le plan Temps-fréquence	11
3.2	Principe de tomographie du scanner et du plan temps-fréquence	13
3.3	FRT d'une porte centrée sur l'origine pour des ordres variant de 0 à 1	18
3.4	Comparaison des complexités (en flops) pour les deux algorithmes en fonction du nombre N d'échantillons	19
3.5	Comparaison des temps pour les deux algorithmes suivant le nombre d'échantillons	19
3.6	Exemples de distributions temps-fréquence. a) et b) filtrage impossible. c) filtrage possible.	20
3.7	Distribution Temps fréquence du signal et allure temporelle avant filtrage . . .	20
3.8	Allure des transformées fractionnaires aux ordres $\alpha = 0.8$ et $\alpha = 0.7$	21
3.9	Reconstruction du signal après filtrage dans les domaines $\alpha = 0.8$ et $\alpha = 0.7$.	22
3.10	Distribution Temps fréquence du signal obtenu après filtrage	22
3.11	Représentation Temps-Fréquence d'un chirp	23
3.12	Effet de la position temporelle d'une porte sur sa TF	24
3.13	Distribution Temps fréquence mettant en évidence la présence de 3 sinus glissants	25
3.14	Détection des sinus glissants par balayage angulaire sur la FRT	25
3.15	Détection des sinus glissants noyés dans le bruit par balayage angulaire sur la FRT	26
A.1	FRT de $\mathcal{H}_2(\sqrt{2\pi}t_\alpha)e^{-\pi t_\alpha^2}$	33
A.2	FRT de $\mathcal{H}_3(\sqrt{2\pi}t_\alpha)e^{-\pi t_\alpha^2}$	34
A.3	FRT de $\mathcal{H}_4(\sqrt{2\pi}t_\alpha)e^{-\pi t_\alpha^2}$	34
A.4	FRT d'un sinus pour des angles variant de 0 à $\frac{\pi}{2}$	34
A.5	FRT d'un cosinus pour des angles variant de 0 à π	35
A.6	FRT d'un sinus glissant pour des angles variant de 0 à π	35
A.7	FRT d'une porte pour des angles variant de 0 à π	36

Résumé :

Il est fréquent de voir les espaces temps et fréquence comme deux espaces orthogonaux, le passage de l'un à l'autre s'effectuant par la transformée de Fourier. Les distributions temps fréquence utilisent en effet cette orthogonalité comme principe pour leurs représentations dans le plan dit *temps-fréquence*. Pourtant, cette orthogonalité trouve une justification mathématique et il est maintenant possible par l'intermédiaire de la transformée de Fourier fractionnaire (FRT) de représenter le signal dans des domaines intermédiaires formant un angle non droit par rapport à l'espace temps. Ce document présente la transformée de Fourier fractionnaire (FRT) et quelques unes de ses applications, notamment pour le traitement du signal et le calcul analytique. Un algorithme de FRT basé sur la FFT y est proposé et est appliqué à l'analyse de signaux à base de sinus glissants pour lesquels la FRT semble particulièrement bien adaptée. Enfin, la relation entre la Transformée de Fourier et la Transformée en Echelle est utilisée pour étendre le principe d'opérateur fractionnaire et introduire la transformée en échelle fractionnaire.

Mots Clés :

- ✦ Fourier fractionnaire,
- ✦ Analyse temps fréquence,
- ✦ Algorithme de FRT,
- ✦ Filtrage optimal,
- ✦ Détection de sinus glissants (*dechirpage en anglais*).

Abréviations utilisées

- ✦ TS : Traitement du Signal
- ✦ TF : Transformée de Fourier
- ✦ FRT : Transformée de Fourier Fractionnaire
- ✦ TE : Transformée en Echelle
- ✦ TEF : Transformée en Echelle Fractionnaire
- ✦ WVD : Distribution de Wigner Ville
- ✦ TR : Transformée de Radon
- ✦ TFCT : Transformée de Fourier à Court Terme
- ✦ FFT : Transformée de Fourier Rapide

Chapitre 1

Introduction

1.1 Un peu d'histoire

En 1807, alors qu'il est Préfet de l'Isère, Joseph Fourier(1768-1830) définit la Série de Fourier d'une fonction périodique et affirme en toute généralité que celle-ci doit converger vers la fonction envisagée, sans se poser davantage de questions. Il fallut cependant presque la totalité du siècle pour mesurer toutes les lacunes résultant d'une telle généralité. On doit en effet à Lebesgue, vers 1885, la démonstration la plus générale quant à la convergence en moyenne quadratique lorsque $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

L'analyse de Fourier s'impose alors comme un outil aux applications tant pratiques que fondamentales. Des marées aux mouvements des planètes dans le système solaire, toutes les fonctions continues périodiques sont décomposées en séries de Fourier au cours du siècle précédent.

En 1948, grâce à Laurent Schwartz et sa théorie des distributions, l'analyse de Fourier connaît un second souffle et peut s'appliquer désormais à des problèmes discrets. Dès lors, avec l'arrivée des calculateurs elle devient le principal outil en traitement du signal. Ceci est dû à la mise en place de l'algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT) par James Cooley et John Tukey en 1965, d'après une idée originale de Gauss en 1805, alors qu'il cherchait à calculer des orbites d'astéroïdes à partir d'un petit nombre d'observations : *“L'expérience enseignera aux utilisateurs que cette méthode réduit grandement les calculs.”*

Devant l'impuissance de la transformée de Fourier à établir un véritable dictionnaire entre les propriétés temporelles et fréquentielles d'un signal Dennis Gabor propose vers 1940 l'analyse des signaux par fenêtres afin de pallier ce problème mais de façon partielle.

En 1980, Victor Namias [1] propose une première généralisation de la TF sous le nom de transformée de Fourier fractionnaire (FRT), en repartant de sa définition sous forme d'opérateur, qui s'avère être un outil analytique intéressant mais qui ne rencontre pas un franc succès en traitement du signal, sans doute en raison de l'arrivée en 1985 de l'analyse en ondelettes par Alex Grossmann et Yves Meyer qui offre un nouvel éclairage sur les signaux. La théorie concernant la transformée de Fourier fractionnaire a été rendue rigoureuse par McBride et Kerr [2] en 1987. Elle se développe aujourd'hui en optique -où elle peut être réalisée de manière expérimentale par un jeu de lentilles- et en traitement du signal depuis qu'en 1994 Luís Almeida [3] et Haldun Ozaktas [4] ont proposé un algorithme rapide de FRT ainsi qu'une interprétation de la FRT dans le plan temps-fréquence.

1.2 Objectifs

Ce rapport a pour but d'exposer les résultats concernant la FRT, et d'en proposer une nouvelle application en traitement du signal, pour l'analyse et le filtrage de signaux à base de sinus glissants. Ce sont des signaux que l'on rencontre fréquemment dans la nature, sous forme de sons émis par les dauphins ou de signal Doppler, et dont l'analyse présente un intérêt certain. La FRT propose de généraliser la transformée de Fourier en permettant de visualiser l'évolution *continue* d'un signal temporel jusqu'à sa forme fréquentielle. Elle introduit ainsi entre le temps et la fréquence de nouveaux espaces temps (ou fréquence) fractionnaires dans lesquels l'information portée par le signal peut s'avérer mieux structurée.

La seconde partie de ce rapport présente les fondements théoriques de la FRT, sa définition ainsi que les propriétés qui en découlent immédiatement. La troisième partie concerne les algorithmes proposés par García [5] et Ozaktas [4]. Elle détaille leurs implémentations et compare leurs performances et présente les applications de la FRT au filtrage ou à l'analyse de signaux. La quatrième partie présente de façon générique les applications possibles de la FRT dans divers domaines.

Chapitre 2

Présentation théorique

2.1 Définition

2.1.1 L'approche de Namias

Pour générer la FRT, Namias [1] dut revenir à la définition théorique de la transformée de Fourier comme opérateur différentiel et linéaire appliqué à une fonction de carré intégrable :

$$\mathcal{F} : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$$
$$f : \omega \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\omega x} dx. \quad (2.1)$$

Pour cet opérateur, dont les fonctions propres sont les polynômes d'Hermite \mathcal{H}_n où $n \in \mathbb{N}$ est le degré du polynôme, la solution du problème aux valeurs propres s'écrit :

$$\mathcal{F}[e^{-\frac{x^2}{2}} \mathcal{H}_n(x)](y) = e^{in\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} \mathcal{H}_n(y), \quad (2.2)$$

résultat qui vient de l'expression des polynômes d'Hermite sous la forme :

$$\mathcal{H}_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}(x), \quad (2.3)$$

mais aussi du fait que e^{x^2} est invariant par la TF (pour la convention pulsation). La proposition de Namias fut alors de retrouver l'opérateur associé à des valeurs propres $e^{in\phi}$ correspondant à des angles différents de $\frac{\pi}{2}$. En effet, en notant désormais $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\frac{\pi}{2}}$ en rapport à ses valeurs propres $e^{\frac{in\pi}{2}}$, le problème est maintenant de reconstruire l'opérateur satisfaisant l'équation aux valeurs propres :

$$\mathcal{F}_{\phi}[e^{-\frac{x^2}{2}} \mathcal{H}_n(x)](y) = e^{in\phi} e^{-\frac{y^2}{2}} \mathcal{H}_n(y). \quad (2.4)$$

Pour cela, et pour bien comprendre l'intérêt du problème, il convient de réécrire \mathcal{F}_{ϕ} sous la forme d'un opérateur de rotation $e^{i\phi\mathcal{A}}$. Ce changement peut se faire en toute généralité car la rotation est une application bijective mais il apporte quelques informations sur l'opérateur étant donnée la symétrie de l'équation (2.4) qui devient :

$$e^{i\phi\mathcal{A}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathcal{H}_n(x) = e^{in\phi} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathcal{H}_n(x) \quad \text{où} \quad \mathcal{A} = -\frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2 + 1 \right), \quad (2.5)$$

\mathcal{A} étant obtenu à l'aide de la relation de récurrence sur les polynômes d'Hermite appliquée à la dérivée de (2.5) :

$$\mathcal{H}_n''(x) - 2x\mathcal{H}_n'(x) + 2n\mathcal{H}_n(x) = 0. \quad (2.6)$$

Ainsi, \mathcal{F}_0 est l'opérateur identité et \mathcal{F}_π l'opérateur parité qui correspond à un retournement du signal. La transformée de Fourier et son inverse sont obtenues pour $\phi = \pm\frac{\pi}{2}$ et plus généralement l'inverse d'une transformée à un angle quelconque \mathcal{F}_ϕ est $\mathcal{F}_{-\phi}$ (modulo 2π).

Ces résultats permettent de donner une interprétation de la FRT comme une rotation dans le plan Temps-Fréquence. En considérant en effet que le temps et la fréquence sont orthogonaux et que $\mathcal{F}_{\pm\frac{\pi}{2}}$ permet de passer de l'un à l'autre, nous pouvons dès lors penser qu'une transformation \mathcal{F}_ϕ placera le signal suivant une direction formant un angle ϕ par rapport à l'axe des temps. Ce résultat encore intuitif sera démontré dans la section 3.2.

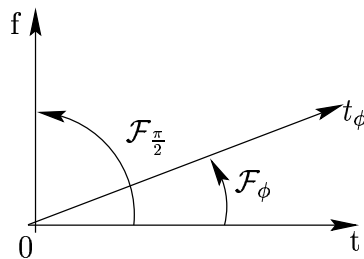


FIG. 2.1 – La FRT vue comme une rotation dans le plan Temps Fréquence

2.1.2 Représentation intégrale

La formulation précédente, bien qu'intéressante pour des considérations théoriques, est d'un usage peu commode et il est plus courant pour calculer la transformée d'une fonction de passer par la formulation intégrale de l'opérateur. Pour aboutir à celle-ci, il faut considérer la base orthogonale $\{e^{-\frac{x^2}{2}}\mathcal{H}_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ des fonctions propres de notre opérateur données par l'équation (2.2). Dans cette base, on peut développer toute fonction $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ sous la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\frac{x^2}{2}} \mathcal{H}_n(x) \quad \text{où} \quad a_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathcal{H}_n(x) f(x) dx, \quad (2.7)$$

d'après (2.2), en transformant f par \mathcal{F}_ϕ il vient

$$\mathcal{F}_\phi f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\phi} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathcal{H}_n(x). \quad (2.8)$$

Pour aboutir à une formulation intégrale de la FRT, il faut utiliser la *formule de Mehler* basée sur la représentation intégrale des polynômes d'Hermite

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in\phi}}{2^n n! \sqrt{\pi}} \mathcal{H}_n(x) \mathcal{H}_n(x') = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{1 - e^{2i\phi}}} e^{\frac{2xx' e^{i\phi} - e^{2i\phi}(x^2 + x'^2)}{1 - e^{2i\phi}}}. \quad (2.9)$$

En reportant alors cette formule et l'expression des a_n dans (2.8), Namias obtint la première version des formules de transformée de Fourier fractionnaire directe \mathcal{F}_ϕ pour $0 < \phi < \pi$ et

inverse $\mathcal{F}_{-\phi}$ pour $-\pi < -\phi < 0$. Cependant, le fait de différencier transformée directe et inverse n'est pas en parfaite adéquation avec la logique d'opérateur de rotation espérée, car il suppose pour la loi de composition que l'on compose toujours deux rotations d'angles de mêmes signes. Aussi pour pallier ce problème McBride [2] a repris l'étude rigoureuse de la FRT et a proposé pour ne plus avoir de problème de signe une formulation intégrale modifiée faisant intervenir $\text{sgn}(\sin \phi)$:

Pour $0 < |\phi| < \pi$,

$$[\mathcal{F}_\phi f](x) = \frac{e^{-i(\text{sgn}(\sin \phi)\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2})}}{\sqrt{2\pi|\sin \phi|}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i((x^2+y^2)\cot\phi - \frac{2xy}{\sin \phi})} f(y) dy. \quad (2.10)$$

Pour ϕ fixé, le premier terme du membre de droite de cette équation est constant et il est fréquent de le noter :

$$A_\phi = \frac{e^{-i(\text{sgn}(\sin \phi)\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2})}}{\sqrt{|\sin \phi|}}. \quad (2.11)$$

La validité de l'équation, à savoir $0 < |\phi| < \pi$, se joue au niveau de ce terme et c'est ce même terme qui avait posé des problèmes à Namias. Pour étendre la validité de la FRT $\forall \phi \in \mathbb{R}$, il faut l'écrire :

$$A_\phi = \frac{e^{-i(\text{sgn}(\sin \phi)\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(2n\pi - \phi))}}{\sqrt{|\sin \phi|}} \quad \text{où } n \in \mathbb{Z} \text{ est tel que } (2n-1)\pi < \phi < (2n+1)\pi. \quad (2.12)$$

2.2 Propriétés

2.2.1 Propriétés directes

Quelques propriétés découlent naturellement de la définition de la FRT, notamment en ce qui concerne la composition de l'opérateur

- ❶ Opérateur identité : $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{2\pi} = \mathcal{I}$,
- ❷ Cohérence avec la TF : $\mathcal{F}_{\frac{\pi}{2}} = \mathcal{F}$,
- ❸ Composition de FRT : $\mathcal{F}_\alpha \mathcal{F}_\beta = \mathcal{F}_{\alpha+\beta}$,
- ❹ Si \bar{f} dénote le complexe conjugué, alors $\mathcal{F}_{-\phi} f(x) = \overline{\mathcal{F}_\phi f(x)}$.

2.2.2 Autres propriétés

En effectuant la FRT d'une fonction sujette à des opérations telles que multiplication par un polynôme, dérivation, ..., il est possible de se ramener à la FRT de la fonction. Les résultats, présentés ici de manière très générale sans leur démonstration (voir [2] et [3] pour les démonstrations), sont particulièrement intéressants pour la résolution d'équations différentielles.

Un exemple de résolution d'équation par transformée de Fourier Fractionnaire est donné en annexe B. Cet exemple utilise les résultats suivants pour transformer l'équation d'origine.

De manière générale la FRT peut être utilisée pour résoudre des équations différentielles à coefficients non constants, car la possibilité de choix de l'angle ajoutent un degré de liberté à l'équation et permet de supprimer des coefficients difficilement traitables par les méthodes analytiques habituelles. Il est enfin possible de se référer à l'article de Victor Namias [1] pour voir d'autre applications de la FRT sur les équations différentielles de la mécanique quantique notamment.

Dérivation

Pour $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, $\phi \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{F}_\phi \left[\frac{d^m f}{dy^m}(y) \right] (x) = (-ix \sin \phi + \cos \phi \frac{d^m}{dx^m}) [\mathcal{F}_\phi f](x). \quad (2.13)$$

La démonstration se fait trivialement à l'ordre 1 en intégrant par parties f d'une part et $\frac{df}{dy}$ d'autre part. La généralisation à l'ordre m est immédiate par récurrence en prenant toutefois garde que x et $\frac{df}{dx}$ ne commutent pas.

Intégration

En partant de (2.13) au premier ordre puis en effectuant le changement de variable $\frac{df}{dy} = g(y)$, la résolution de l'équation différentielle du premier ordre donne la règle d'intégration de la FRT : Pour $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, $\phi \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{F}_\phi \left[\int_a^x g(y) dy \right] (x) = \frac{e^{-\frac{ix^2}{2} \tan \phi}}{\cos \phi} \int_a^x e^{\frac{iz^2}{2} \tan \phi} (\mathcal{F}_\phi f(y))(z) dz. \quad (2.14)$$

Multiplication

Pour $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, $\phi \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{F}_\phi [y^m f(y)](x) = (x \cos \phi - i \sin \phi \frac{d^m}{dx^m}) [\mathcal{F}_\phi f](x). \quad (2.15)$$

Là encore cela peut se démontrer en intégrant par partie mais une solution plus judicieuse consiste à remplacer f par sa décomposition en série donnée par (2.7). Le calcul devient celui $\mathcal{F}_\phi [x e^{-\frac{x^2}{2}} \mathcal{H}_n(x)]$ qui se résout simplement compte tenu de la relation de récurrence sur les polynômes d'Hermite et leurs dérivées $\mathcal{H}'_n(x) = 2n \mathcal{H}_{n-1}(x)$

Produit mixte : multiplication - dérivation

Pour $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}$ et $\phi \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}_\phi \left[\left(y \frac{d}{dy} \right)^m f(y) \right] (x) = \left[-(\sin \phi + ix^2 \cos \phi) \sin \phi + x \cos 2\phi \frac{d}{dx} - i \sin \phi \cos \phi \frac{d^2}{dx^2} \right]^m (\mathcal{F}_\phi f)(x). \quad (2.16)$$

Ce résultat découle directement de (2.15) et (2.13).

Translation

Pour $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ et $\phi, b \in \mathbb{R}$, si \mathcal{T}_b est l'opérateur de translation d'une longueur b , défini par $[\mathcal{T}_b f](x) = f(x + b)$, alors :

$$\mathcal{F}_\phi[\mathcal{T}_b f](x) = e^{-ib \sin \phi(x + \frac{b \cos \phi}{2})} (\mathcal{F}_\phi f)(x + b \cos \phi). \quad (2.17)$$

La translation a donc pour effet de multiplier la translatée de la transformée par un facteur de phase dépendant lui-même du facteur de translation. La démonstration se fait à partir de (2.10) en effectuant simplement le changement de variable $y' = y + b$.

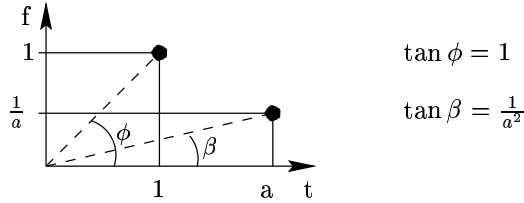
Multiplication par une exponentielle

Pour $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ et $\phi, b \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}_\phi[e^{by} f(y)](x) = e^{ib \cos \phi(x + \frac{b \sin \phi}{2})} (\mathcal{F}_\phi f)(x + b \sin \phi). \quad (2.18)$$

Homothétie

La formule concernant la FRT de $f(ax)$ est relativement fastidieuse. Elle produit en plus du changement d'unité (comparable à celui de la TF) un changement de l'angle de la FRT qui devient $\beta = \arctan(a^2 \tan \phi)$. Géométriquement, ceci vient naturellement compte tenu qu'une dilatation de l'axe temporel comprime l'axe fréquentiel. Alors,



$$\mathcal{F}_\phi[f(ay)](x) = \sqrt{\frac{1 - i \cot \phi}{a^2 - i \cot \phi}} e^{i \frac{x^2}{2} \cot \phi \left(1 - \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \phi}\right)} \mathcal{F}_\beta \left[f\left(x \frac{\sin \beta}{a \sin \phi}\right) \right]. \quad (2.19)$$

Seul le cas $f(-x)$ donne un résultat simple, car $\beta = \phi$

$$[\mathcal{F}_\phi f(-y)](x) = [\mathcal{F}_\phi f](-x) = [\mathcal{F}_{\phi-\pi} f(y)](x). \quad (2.20)$$

Chapitre 3

Application au traitement du signal

3.1 Les résultats importants

Quelques résultats ont favorisé le développement de la FRT en traitement du signal. Il faut toutefois rappeler quelques définitions de transformées intégrales importantes pour une bonne compréhension de l'interprétation de la FRT comme rotation dans le plan Temps Fréquence. Ces transformées et une partie des distributions appartenant à la classe de Cohen peuvent être reliées de manière simple à la FRT.

Il convient aussi de redéfinir les notations utilisées en TS car elles sont un peu différentes des notations données au chapitre 2 qui ont un fort caractère mathématique. Le TS utilise naturellement la convention *fréquence* pour la TF et donc pour la FRT alors que les mathématiques emploient une convention *pulsation* plus propice au calcul analytique.

3.1.1 Notations

Un signal temporel est noté en toute généralité $S(t)$ et sa TF est alors définie par :

$$[\mathcal{F}_{\frac{\pi}{2}}S](f) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(t)e^{-i2\pi ft} dt. \quad (3.1)$$

En ce qui concerne la FRT, il est fréquent de changer quelque peu sa notation, en ne considérant non plus l'angle ϕ de rotation mais un *ordre fractionnaire* équivalent tel que $\phi = \alpha \frac{\pi}{2}$ et l'opérateur est noté

$$\mathcal{F}_{\phi} \longrightarrow \mathcal{F}^{\alpha}, \quad \text{où } \phi = \alpha \frac{\pi}{2}, \text{ avec } 0 < |\alpha| < 2. \quad (3.2)$$

Dans cette logique, l'unité correspondant au *temps fractionnaire* est notée t_{α} et la FRT de $S(t)$ devient $S_{\alpha}(t_{\alpha})$. Enfin, en définissant la fonction noyau de la transformée par

$$\mathcal{K}_{\alpha}(t_{\alpha}, t) = \begin{cases} A_{\phi} e^{i\pi((t_{\alpha}^2 + t^2)\cot\phi - \frac{2t_{\alpha}t}{\sin\phi})} & \text{si } \phi \neq n\pi, n \in \mathbb{Z} \\ \delta(t - t_{\alpha}) & \text{si } \phi \text{ est multiple de } 2\pi, \\ \delta(t + t_{\alpha}) & \text{si } \phi + \pi \text{ est multiple de } \pi, \end{cases} \quad (3.3)$$

la FRT et son inverse s'écrivent :

$$S_\alpha(t_\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{K}_\alpha(t_\alpha, t) S(t) dt \quad \text{et} \quad S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{K}_{-\alpha}(t_\alpha, t) S_\alpha(t_\alpha) dt_\alpha. \quad (3.4)$$

Les fonctions noyaux \mathcal{K}_α vérifient un certain nombre de propriétés importantes pour la suite :

$$\text{Continuité en } \alpha \quad \lim_{\alpha \rightarrow n\pi} = \mathcal{K}_{n\pi}, \quad (3.5)$$

$$\text{Commutativité} \quad \mathcal{K}_\alpha(t, t_\alpha) = \mathcal{K}_\alpha(t_\alpha, t), \quad (3.6)$$

$$\text{Conjugaison} \quad \mathcal{K}_{-\alpha}(t, t_\alpha) = \overline{\mathcal{K}_\alpha(t, t_\alpha)}, \quad (3.7)$$

$$\text{Composition} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{K}_\alpha(t, t') \mathcal{K}_\beta(t', t_\alpha) dt' = \mathcal{K}_{\alpha+\beta}(t, t_\alpha), \quad (3.8)$$

$$\text{Orthogonalité} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{K}_\alpha(t, t_\alpha) \overline{\mathcal{K}_\alpha(t, t'_\alpha)} dt = \delta(t_\alpha - t'_\alpha). \quad (3.9)$$

Enfin, pour rendre plus lisibles les résultats de la section 3.1.4, l'opérateur pour une rotation d'un angle ϕ autour de l'origine dans le plan Temps-fréquence (orienté dans le sens trigonométrique) est noté \mathcal{R}_ϕ .

3.1.2 Rappels sur les transformations intégrales

Wigner Ville

La distribution de Wigner Ville est notée $\mathcal{W}_S(t, \omega)$ et elle est définie par

$$\mathcal{W}_S(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(t + \frac{\tau}{2}) \overline{S}(t - \frac{\tau}{2}) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (3.10)$$

La distribution de Wigner Ville d'un signal répartit l'énergie du signal dans le plan temps-fréquence suivant l'occurrence de chaque composante fréquentielle dans le temps. Elle est particulièrement efficace pour les signaux monocomposantes et pour les signaux dont la fréquence varie linéairement.

Radon

La transformée de Radon [6] permet, à partir de distribution temps-fréquence de signaux à composantes multiples, de concentrer les zones correspondantes à chaque signal et d'en faciliter ainsi l'interprétation. Elle consiste à réintégrer la distribution après avoir effectué une rotation dans le plan temps-fréquence. Mathématiquement, elle effectue la projection d'un signal en 2 dimensions suivant un certain angle (voir figure 3.1). On note l'opérateur \mathcal{R}_ϕ et la transformée de $S(t, \omega)$ \mathcal{R}_S et elle est définie par :

$$\mathcal{R}_\phi[S(t, \omega)] = \mathcal{R}_S(r, \phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(r \cos \phi - u \sin \phi, r \sin \phi + u \cos \phi) du, \quad (3.11)$$

où $r = t \cos \phi + \omega \sin \phi$ et $u = -t \sin \phi + \omega \cos \phi$.

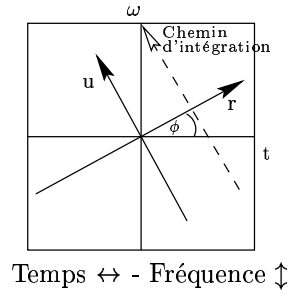


FIG. 3.1 – Effet de la Transformée de Radon dans le plan Temps-fréquence

Elle vérifie quelques propriétés importantes :

- ❶ Linéarité : $\mathcal{R}_{(f+g)} = \mathcal{R}_f + \mathcal{R}_g$,
- ❷ Invariance par rotation : une rotation d'un angle α de $f(t, \omega)$ entraînera la rotation du même angle de sa transformée de Radon,
- ❸ Décalage : $\mathcal{R}_\phi[S(t - t_0, \omega - \omega_0)] = \mathcal{R}_S(r - t_0 \cos \phi - \omega_0 \sin \phi, \phi)$,

Cette transformée est intéressante dans la mesure où elle peut être rapprochée de la FRT dans son interprétation dans le plan temps-fréquence. Elle est utilisée pour faire de la détection de sinus glissants sur des signaux à multicomposantes et est robuste au bruit. De plus, une relation avec la TF a permis à Zeev Zalevsky [7] de proposer un modèle de transformée de Radon fractionnaire. Ceci n'est pas le propos de ce rapport mais nous retiendrons toutefois la démarche de “*fractionnalisation*” de la transformée.

3.1.3 Identité de Parseval

La relation de Parseval se déduit directement des propriétés (3.9), (3.7) sur les \mathcal{K}_α et de l'équation (3.4) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \overline{y}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X_\alpha(t_\alpha) \mathcal{K}_{-\alpha}(t, t_\alpha) dt_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{Y}_\alpha(t'_\alpha) \overline{\mathcal{K}_{-\alpha}}(t, t'_\alpha) dt'_\alpha \right] dt \quad (3.12)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X_\alpha(t_\alpha) \overline{Y}_\alpha(t_\alpha) \delta(t - t_\alpha) dt_\alpha \quad (3.13)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X_\alpha(t_\alpha) \overline{Y}_\alpha(t_\alpha) dt_\alpha. \quad (3.14)$$

Une conséquence de cette relation est la propriété de conservation de l'énergie obtenue pour $y(t) = x(t)$. Cette propriété est en effet essentielle pour faire de l'analyse-synthèse de signaux

car elle indique qu'un signal peut être reconstruit à partir de sa transformée.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X_\alpha(t_\alpha)|^2 dt_\alpha} \quad (3.15)$$

3.1.4 Relation entre les différentes transformées

Relation Wigner Ville - FRT

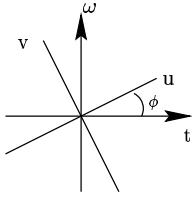
En effectuant un changement de variable dans la relation (3.10) définissant la WVD qui s'écrit alors

$$\mathcal{W}_S(t, \omega) = 2e^{2j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\tau) \overline{S}(2t - \tau) e^{-2i\omega\tau} d\tau, \quad (3.16)$$

et compte tenu de la propriété (2.17) qui permet d'exprimer $\overline{S}(2t - \tau)$ en fonction de $\overline{S}_\alpha(-t_\alpha + 2 \cos \phi)$, il vient :

$$\mathcal{W}_S(t, \omega) = 2e^{2i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{S}_\phi(-t_\alpha + 2 \cos \phi) e^{-2it^2 \sin \phi \cos \phi + 2it_\alpha t \sin \phi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} S(\tau) e^{2j\omega\tau} \mathcal{K}_\alpha(\tau, t_\alpha) d\tau \right] dt_\alpha. \quad (3.17)$$

D'après la propriété (2.18) de multiplication par une exponentielle, $\int_{-\infty}^{+\infty} S(\tau) e^{2j\omega\tau} \mathcal{K}_\alpha(\tau, t_\alpha) d\tau$ se calcule aisément. Le calcul est mené à terme en effectuant premièrement le changement de variable (3.18) $\varepsilon = t_\alpha + 2\omega \sin \phi$ puis sur le membre de droite les changements correspondant à une rotation du temps et de la fréquence. Finalement :



$$\begin{aligned} u &= t \cos \phi + \omega \sin \phi & u &= t \cos \phi + \omega \sin \phi \\ v &= -t \sin \phi + \omega \cos \phi & v &= -t \sin \phi + \omega \cos \phi. \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\mathcal{W}_S(t, \omega) = 2e^{2iuv} \int_{-\infty}^{+\infty} S_\phi(\varepsilon) \overline{S}_\alpha(2u - \varepsilon) e^{-2iuv\varepsilon} d\varepsilon. \quad (3.19)$$

Cette équation montre que les WVD de S et de S_α coïncident à une rotation d'angle ϕ près. En effet, suite aux changements de variables (3.18), les deux membres sont exprimés dans des systèmes d'axes différents, l'un en (t, ω) , l'autre en (u, v) . Nous retiendrons donc que la WVD de S et la WVD de S_α se déduisent l'une de l'autre par une rotation d'angle $\pm\phi$.

$$\mathcal{W}_{S_\alpha}(t, \omega) = \mathcal{W}_S(t \cos \phi - \omega \sin \phi, t \sin \phi + \omega \cos \phi), \text{ soit} \quad (3.20)$$

$$\boxed{\mathcal{W}_{S_\alpha}(t, \omega) = \mathcal{R}_\phi[\mathcal{W}_S(t, \omega)]}. \quad (3.21)$$

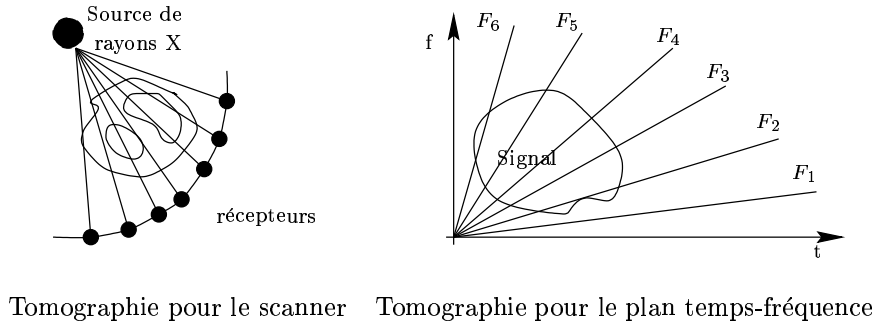


FIG. 3.2 – Principe de tomographie du scanner et du plan temps-fréquence

Cette relation est notamment utilisée pour faire de la tomographie dans le plan temps-fréquence et reconstruire la WVD du signal à partir d'un nombre fini de FRT. La tomographie (qui veut dire littéralement *observation de tranches*) est la méthode utilisée pour obtenir les images de scanner qui ne sont autres que des images de tranches du corp humain. Elle est aussi utilisée en géophysique pour rechercher les couches de pétroles dans l'écorce terrestre ou étudier la composition des sols. Elle consiste à envoyer des ondes (acoustiques, rayons X, ...) et à interpoler la structure du milieu en fonction des coefficients d'atténuations des ondes reçues. Dans le cas de la FRT, la WVD est reconstruite à partir des FRT effectuées à des angles réguliers, chacune constituant une tranche de la WVD (voir figure 3.2).

Relation Radon - FRT

Le résultat précédent (3.20) peut être remanié en utilisant la définition de la transformée de Radon (3.11). Il vient alors, pour un même angle de TR et de FRT :

$$\mathcal{R}[\mathcal{W}_S(t, \omega)](t_\alpha) = |S_\alpha(t_\alpha)|^2 \quad (3.22)$$

Cette relation traduit différemment le fait que la WVD de S_α est obtenue par rotation de la WVD de S , rotation effectuée par la TR. Elle montre aussi que la projection de la WVD de S suivant la direction α est le module au carré de la FRT de S suivant l'angle α .

Relation TFCT - FRT - Spectrogramme

Soit une fenêtre de forme $\mathcal{W}(t)$. La TFCT \mathcal{S} de S est alors définie par :
En temporel,

$$\mathcal{S}(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\tau) \overline{\mathcal{W}}(t - \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (3.23)$$

En fréquentiel,

$$\mathcal{S}(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\frac{\pi}{2}}(f) \overline{\mathcal{W}_{\frac{\pi}{2}}}(\omega - f) e^{itf} df. \quad (3.24)$$

La démonstration est semblable à celle utilisée pour établir la relation avec la WVD. En remplaçant dans (3.23) S par sa FRT inverse (3.4) puis en appliquant la propriétés d'homothétie

(2.19), il faut alors effectuer le même changement de variables (3.18) correspondant à une rotation dans le plan temps-fréquence pour finalement aboutir à :

$$\mathcal{S}(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\frac{uv}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\alpha}(z) \overline{\mathcal{W}_{\alpha}}(u - z) e^{ivz} dz. \quad (3.25)$$

Ce résultat est donc très proche de celui obtenu pour la WVD, à savoir que les TFCT de S et de S_{α} diffèrent d'une rotation d'angle ϕ et sont déphasées par le facteur $e^{i\frac{uv}{2}}$. Le spectrogramme vérifie la même relation du fait qu'il n'est autre que le module au carré de la TCFT ; c'est-à-dire que le spectrogramme de S fenêtré par \mathcal{W} se déduit du spectrogramme de S_{α} fenêtré par \mathcal{W}_{α} par une rotation d'angle $-\phi$.

Extension aux distributions appartenant à la classe de Cohen

Soit T_S une distribution appartenant à la classe de Cohen. Elle peut être définie à partir de la WVD de S comme suit :

$$T_S(t, \omega) = \int \int_{t' \ w'} \Psi_T(t - t', \omega - \omega') \mathcal{W}_S(t, \omega) dt' d\omega' \quad (3.26)$$

où $\Psi_T(t, \omega)$ est le noyau de la transformée

Les résultats précédents peuvent s'étendre aux distributions appartenant à la classe de Cohen dont la fonction noyau vérifie la propriété d'invariance par rotation autour de l'origine. Alors,

$$\boxed{T_{S_{\alpha}}(t, \omega) = \mathcal{R}_{\phi}[T_S(t, \omega)]}. \quad (3.27)$$

3.2 Implémentation de l'algorithme

L'algorithme a été implémenté de deux manières différentes suite aux lectures des articles de Haldun Ozaktas [4] et de Javier García [5]. La *première méthode* réalise l'algorithme de manière brute, sans aucune optimisation, en discrétisant simplement l'opérateur. Cette méthode est cependant intéressante car elle permet de bien comprendre les problèmes d'unités qui surgissent lors du passage continu du temps à la fréquence. La *seconde méthode* est basée sur la réalisation optique de la FRT et consiste en deux FFT successives sur le signal modulé. Elle améliore grandement la rapidité de l'algorithme.

Pour les deux algorithmes, le signal est supposé à bandes temporelle et fréquentielle limitées, sans quoi son échantillonnage ne peut remplir les conditions imposées par le théorème de Shannon. Ainsi, nous dirons qu'un signal est contenu dans le pavé $[-\frac{\Delta t}{2}, \frac{\Delta t}{2}] \times [-\frac{\Delta f}{2}, \frac{\Delta f}{2}]$, lorsque la quasi-totalité de son énergie est contenue dans ces intervalles. Ceci est en effet toujours réalisable en prenant Δt et Δf suffisamment grands.

3.2.1 Problèmes de normalisation des unités

La théorie présentée au chapitre précédent se soucie peu des problèmes d'unités inhérents à la physique d'un signal. En effet dans l'équation (2.10) de la partie théorique sont ajoutés mathématiquement $x^2 + y^2$ sans se préoccuper de la réalité physique de ces deux grandeurs.

De même dans l'équation (3.3) qui définit le noyau de la transformée, c'est cette fois-ci $t^2 + t_\alpha^2$ qui pose problème car ses quantités ont *à priori* des unités différentes. Ces inhomogénéités n'apparaissent pas lorsqu'il s'agit de la TF car le produit $t \times f$ est bien sans dimension. La forme quadratique de la FRT fait intervenir des termes d'interférence entre les deux espaces qu'il faut donc interpréter. Une interprétation est de voir l'unité t_α comme un mélange dépendant de l'angle de la FRT entre le temps et la fréquence. Dans cette logique de rotation, t_α prend la valeur

$$t_\alpha = t \cos \phi + f \sin \phi. \quad (3.28)$$

Cette interprétation nous ramène toutefois au même problème que précédemment pour les formules de transformées et la solution qui s'impose donc est une normalisation sans dimension des variables t et f qui peut s'étendre aux domaines fractionnaires. Etant donné que les variables sont de dimensions inverses, il convient d'introduire un facteur de normalisation s homogène à un temps comme suit :

$$\begin{aligned} x &= \frac{t}{s} \\ \nu &= f s. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Dans ces coordonnées, le support du signal devient $[-\frac{\Delta t}{2s}, \frac{\Delta t}{2s}] \times [-\frac{\Delta f s}{2}, \frac{\Delta f s}{2}]$. Il faut alors choisir s tel que ce support soit un pavé **carré** de \mathbb{R}^2 , et donc

$$\frac{\Delta t}{s} = \Delta f s \iff s = \sqrt{\frac{\Delta t}{\Delta f}}. \quad (3.30)$$

Cette condition d'un support carré sans dimension est nécessaire pour le passage continu du temps à la fréquence car la distribution du signal est alors confinée dans un cercle de rayon $\Delta x = \Delta f s = \Delta t / s$ (le temps et la fréquence ont la même longueur Δx). L'axe t_α reste sans dimension quel que soit α et les problèmes d'homothéties de la TF disparaissent (une contraction du temps en seconde entraîne une dilatation des fréquences en Hertz).

En définissant le produit temps-largeur de bande par $N \equiv \Delta t \Delta f$, où $N \geq 1$ d'après le principe d'incertitude, il vient $N = \Delta x^2$, ce qui revient pour un signal discret à considérer N échantillons équidistants de $\frac{1}{\Delta x}$. La fréquence d'échantillonnage dans cette normalisation ne dépend plus que du nombre d'échantillons et devient \sqrt{N} . Ceci s'explique aussi par le fait que la fréquence instantanée des fonctions noyaux de la FRT varie linéairement. Cette forme quadratique des \mathcal{K}_α nécessite une fréquence d'échantillonnage proportionnelle à \sqrt{N} sans quoi la transformée ne serait pas valide aux vues du critère de Shannon pour des signaux trop longs.

3.2.2 Première méthode

Pour bien voir l'ordre dans lequel l'algorithme se programme et la façon dont l'opérateur se discrétise, il faut réécrire S_α , dans (3.3) et (3.4), en regroupant les termes similaires, soit

$$S_\alpha(t_\alpha) = A_\phi e^{i\pi t_\alpha^2 \cot \phi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{i\pi t^2 \cot \phi} S(t) \right] e^{-\frac{2t_\alpha t}{\sin \phi}} dt. \quad (3.31)$$

Avec la normalisation proposée à la section précédente, la discrétisation est alors presque immédiate. La fonction est multipliée par un chirp (voir définition section 3.4.2) dans le domaine temporel puis intégrée pour passer dans le domaine fractionnaire et remultipliée par un

chirp dans le domaine fractionnaire. Le problème vient de la multiplication par un chirp qui *élargit* le support du signal suivant l'axe des fréquences, car elle équivaut à une convolution par $\delta[\nu - \cot \phi x]$ dans le domaine fréquentiel. Le support devient $\Delta x[1 + \max_\alpha(|\cot \phi|)]$

Ce dépassement de la fréquence de Shannon impose une limite sur la zone de validité de l'angle pour l'algorithme. Nous posons ici $\alpha \in [0.5, 1.5]$ afin d'avoir au maximum à suréchantillonner le signal d'un facteur 2, suréchantillonnage qui sera effectué systématiquement, au détriment de la complexité de l'algorithme.

Dans ces conditions, la forme discrétisée s'écrit :

$$S_\alpha \left(\frac{m}{2\Delta x} \right) = \frac{A_\phi}{2\Delta x} e^{i\pi(\cot \phi - \csc \phi)(\frac{m}{2\Delta x})^2} \sum_{n=-N}^N e^{i\pi(\cot \phi - \csc \phi)(\frac{m-n}{2\Delta x})^2} \left[e^{i\pi(\cot \phi - \csc \phi)(\frac{n}{2\Delta x})^2} S\left(\frac{n}{2\Delta x}\right) \right]. \quad (3.32)$$

Le programme réalisé sous Matlab est donné en annexe C, et son efficacité est discutée en section 3.3.1

3.2.3 Deuxième méthode

Pour simplifier la réalisation de l'algorithme, il faut au préalable modifier la partie intégrale de l'équation de base de la FRT. Pour cela, on part du résultat suivant :

$$\cot \phi = \frac{1}{\sin \phi} - \tan \frac{\phi}{2}. \quad (3.33)$$

En effet,

$$\cot \phi = \frac{\cos \phi (1 + \cos \phi)}{\sin \phi (1 + \cos \phi)} = \frac{1 - \sin^2 \phi + \cos \phi}{\sin \phi (1 + \cos \phi)} = \frac{1}{\sin \phi} - \frac{\sin \phi}{(1 + \cos \phi)} = \frac{1}{\sin \phi} - \tan \frac{\phi}{2}.$$

En reportant ce résultat dans l'intégrale, la FRT s'écrit alors sous la forme suivante :

$$S_\alpha(t_\alpha) = A_\phi \underbrace{e^{i\pi t_\alpha^2 \tan \frac{\phi}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi \frac{(t_\alpha - t)^2}{\sin \phi}} \underbrace{\left[S(t) e^{i\pi t^2 \tan \frac{\phi}{2}} \right]}_{dt}}_{dt}. \quad (3.34)$$

La formule ainsi exprimée donne directement les étapes de l'algorithme :

- ❶ Multiplication par un sinus glissant
- ❷ Convolution par $e^{i\frac{\pi}{\sin \phi} t^2}$
- ❸ Multiplication par un sinus glissant et une constante

De plus, la convolution peut être réalisée comme un simple produit en passant dans le domaine de Fourier et le coût devient celui de 2 TF et d'un produit. En discrétisant toujours avec le même principe, l'algorithme s'implémente numériquement de la façon suivante :

- ❶ Multiplication par un facteur de phase quadratique

$$e^{-i\frac{\pi}{N} \tan \frac{\phi}{2} m^2} \quad (3.35)$$

- ❷ FFT pour préparer le produit fréquentiel

- ③ Multiplication par un facteur de phase quadratique

$$e^{-i\frac{\pi}{N} \sin \phi m'^2} \quad (3.36)$$

- ④ FFT inverse qui nous place dans domaine fractionnaire

- ⑤ Multiplication par un facteur de phase quadratique

$$e^{-i\frac{\pi}{N} \sin \phi n^2} \quad (3.37)$$

- ⑥ Multiplication par la constante A_ϕ

Cette méthode d'implémentation de l'algorithme découle directement de la réalisation optique de la FRT. En effet, passer un faisceau lumineux au travers d'une lentille mince équivaut à le multiplier par un facteur de phase quadratique dépendant de la largeur de la lentille (voir [8]). Les étapes 1 et 5 correspondent donc au passage du faisceau à travers les deux lentilles et la convolution n'est autre que la traduction de la propagation dans l'espace inter-lentilles, caractérisé par le second facteur de phase.

3.3 Tests des algorithmes

3.3.1 Validation

3.3.2 Test sur les signaux usuels

Pour vérifier son bon fonctionnement, les algorithmes ont été testés sur les premières fonctions propres de l'opérateur, $e^{-\frac{x^2}{2}} \mathcal{H}_n(x)$ dont les modules doivent rester constants pour tout ordre de FRT. Les allures des transformées obtenues sont similaires et l'invariance des modules est bien vérifiée. Les parties réelles et imaginaires sont modulées respectivement par un cosinus et un sinus, ce qui vient des valeurs propres $e^{ni\phi}$ de l'opérateur (voir equation (2.4)). Les courbes concernant les fonctions propres $\mathcal{H}_2(\sqrt{2\pi}t)e^{-\pi t^2}$, $\mathcal{H}_4(\sqrt{2\pi}t)e^{-\pi t^2}$ et $\mathcal{H}_5(\sqrt{2\pi}t)e^{-\pi t^2}$ (les deux premières fonctions sont 1 et $2x$ et n'ont donc pas été retenues) sont données et discutées en annexe A.1.

Le principe d'analyse par FRT consiste en un balayage de la zone angulaire entre le temps et la fréquence, c'est-à-dire pour des ordres α variant de 0 à 1 (ou plus). Ce balayage permet voir un signal évoluer depuis son allure temporelle jusqu'à son allure fréquentielle et ce de manière continue, car les fonctions noyaux de la transformée sont continues en α d'après (3.5).

Devant ces résultats encourageants, l'algorithme a ensuite été appliqué aux signaux dont les TF sont couramment utilisées (sinus, fenêtres, dirac, bruit blanc,...) toujours avec le souci de voir l'évolution d'un signal de sa forme temporelle jusqu'à sa forme fréquentielle et même plus loin encore (jusqu'au retournement de la séquence pour $\alpha = 2$).

La figure (3.3) montre l'exemple du passage de la porte temporelle au sinus cardinal fréquentiel. La figure étant symétrique, nous ne représentons ici que la moitié de la porte pour plus de lisibilité.

Que l'on regarde l'évolution dans le sens temps \rightarrow fréquence ou dans le sens fréquence \rightarrow temps, on a l'impression que le signal *se propage* suivant α avec toujours cette notion de mémoire du signal d'origine qui est induit par la convolution.

Les autres figures sont données et discutées en annexes.

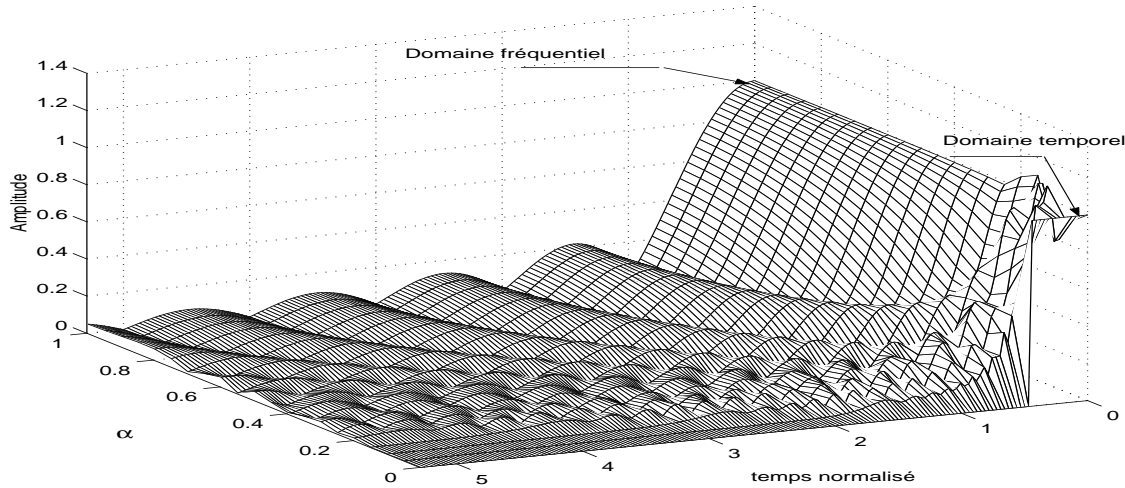


FIG. 3.3 – FRT d’une porte centrée sur l’origine pour des ordres variant de 0 à 1

3.3.3 Complexité et comparaison des algorithmes

Il est fréquent d’établir la complexité d’un algorithme en regardant le nombre de multiplications et d’addition impliquées dans la formule d’implémentation. Dans notre cas, il est crucial de se pencher sur ces problèmes de complexité car la rapidité est sans doute le critère le plus important d’un algorithme.

L’algorithme présenté à la section 3.2.2 présente une complexité de l’ordre de $O(N^2)$ opérations contre $O(N \log N)$ pour celui présenté à la section 3.2.3. Matlab permet de vérifier ces résultats en comptant le nombre d’opérations effectuées par une fonction. Nous trouvons effectivement les complexités annoncées à une constante multiplicative près ce qui est normal car nous n’avons donné que des ordres de complexité.

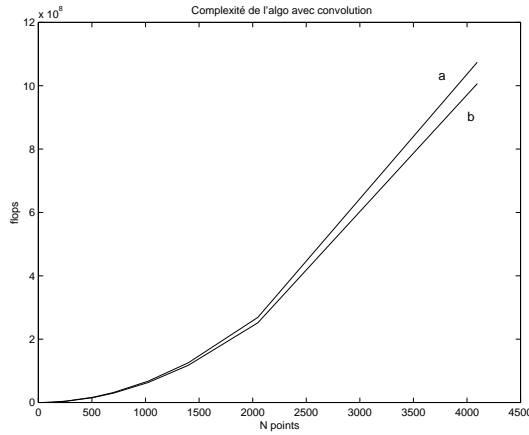
Les figures (3.4 et 3.5) illustrent les résultats trouvés sous Matlab et donnent aussi les temps nécessaires à chaque algorithme pour effectuer la FRT en fonction du nombre d’échantillons. Nous avons enfin testé pour l’algorithme à base de FFT l’effet d’un nombre d’échantillons N égal ou non à une puissance 2. Cela prend environ 3 fois plus de temps quand N n’est pas une puissance de 2 que quand il en est une. Il n’y a par ailleurs pas de communes mesures entre les deux méthodes dès que les tailles des séquences deviennent conséquentes (pour un signal de 2048 échantillons la FRT prend 3 minutes pour l’algorithme à base de convolution contre 0.3 secondes pour l’algorithme à base de FFT).

Les transformées obtenues étant identiques, nous ne retiendrons désormais que l’algorithme basé sur deux FFT successives.

3.4 Applications

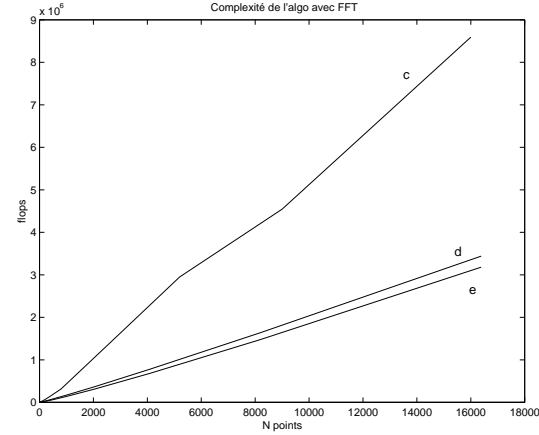
3.4.1 Filtrage dans le domaine fractionnaire

Le principe du filtrage fractionnaire vient des relations de Parseval (3.15) et de Radon (3.22). La relation entre la FRT et la transformée de Radon (3.22) permet de comprendre la notion d’angle optimal pour lequel les signaux présents peuvent se décorréliser. L’identité de



a : Algorithme avec convolution

b : Allure de la courbe $60N^2$



c : Algorithme avec FFT (N quelconque)

d : Algorithme avec FFT ($N = 2^n$)

e : Allure de la courbe $22N \log N$

FIG. 3.4 – Comparaison des complexités (en flops) pour les deux algorithmes en fonction du nombre N d'échantillons

Parseval (3.15) nous affirme que le signal temporel peut être reconstruit après filtrage.

La figure (3.6) montre des exemples de distributions temps-fréquence de signaux dans lesquels le filtrage est impossible dans les domaines temporels et fréquentiels et devient possible dans un domaine fractionnaire. Ceci vient du fait que la FRT projette la distribution temps fréquence du signal sur l'axe t_α et l'avantage de cette méthode de filtrage réside dans le coût de l'opération qui est nettement moindre que pour une transformée de Radon ou même une reconstruction par Wigner Ville. Dans les deux premiers cas de figures, un filtrage propre séparant les deux signaux est rendu impossible par le recouvrement (même faible dans le cas b)) entre les signaux. Le troisième cas, qui reprend la distribution a) mais en effectuant la FRT à un angle différent montre que les signaux sont décorrélés et le filtrage devient possible.

Nous allons maintenant montrer un exemple où le filtrage par FRT est très efficace. Le signal consiste en deux bandes de bruit d'une part et deux sinus fenêtrés par une gaussienne

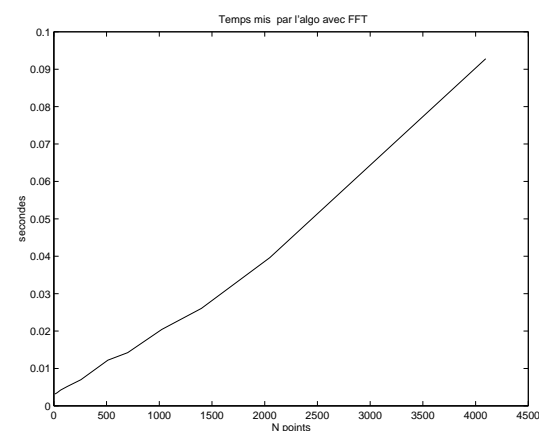
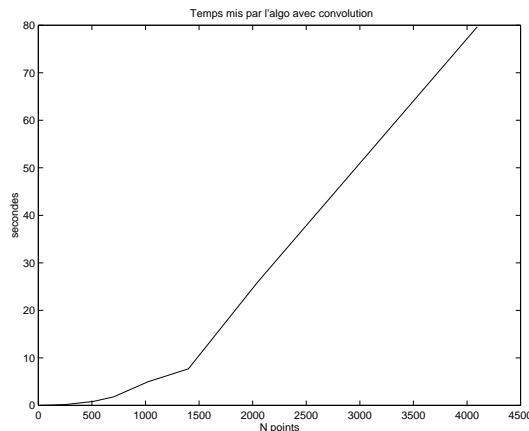


FIG. 3.5 – Comparaison des temps pour les deux algorithmes suivant le nombre d'échantillons

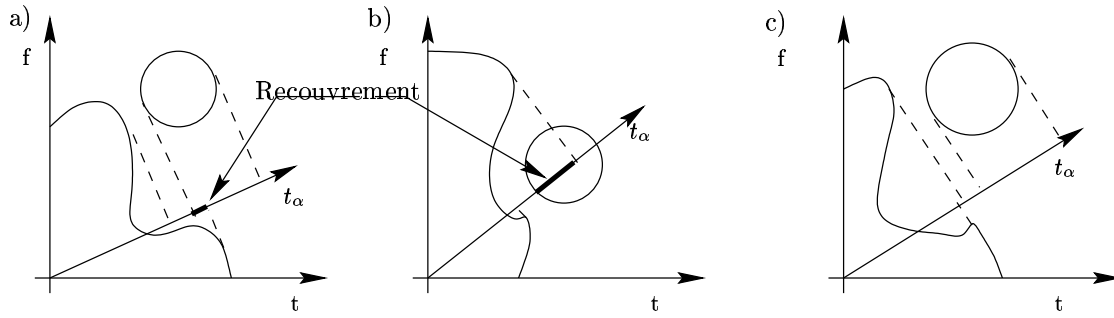


FIG. 3.6 – Exemples de distributions temps-fréquence. a) et b) filtrage impossible. c) filtrage possible.

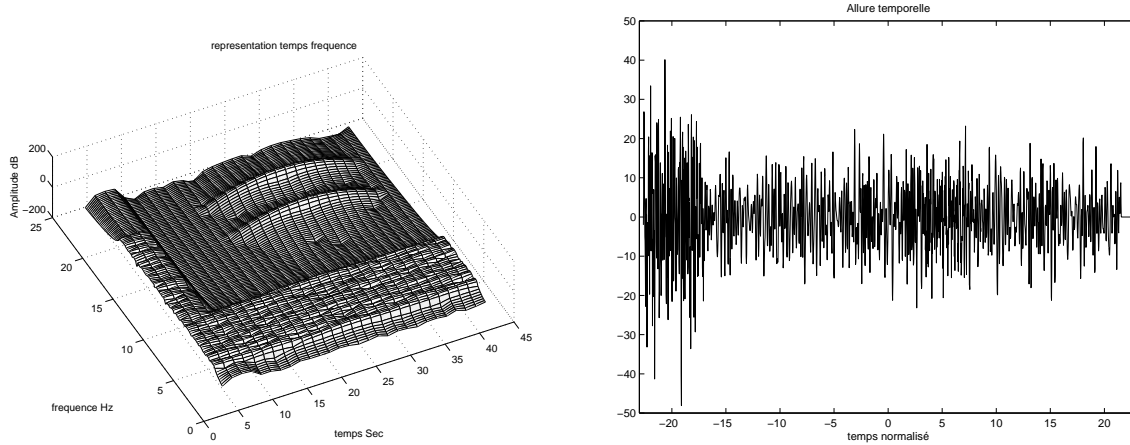


FIG. 3.7 – Distribution Temps fréquence du signal et allure temporelle avant filtrage

d'autre part (signal utile). La première bande de bruit est un bruit blanc localisé temporellement tandis que la seconde est un bruit blanc filtré afin de n'obtenir qu'une bande fréquentielle couvrant les basses fréquences. Les deux sinus occupent dans le plan temps fréquence une zone distincte des deux bandes de bruit. Temporellement et fréquentiellement, la distinction des sinus est impossible car le rapport signal sur bruit est très faible (-20 dB). La figure 3.7 montre la distribution du signal dans le plan temps fréquence ainsi que son allure temporelle.

En effectuant des FRT à différents angles, il est possible de séparer le bruit des sinus, conformément au principe de filtrage énoncé précédemment. Ceci permet de bien comprendre que le filtrage n'est possible que pour certaines valeurs de l'angle ou bruit et signal deviennent quasiment décorrélés. La figure 3.8 montre les FRT pour les ordres $\alpha = 0.5$, $\alpha = 0.7$ et $\alpha = 0.8$. Le signal *se sépare* du bruit pour des valeurs de α comprises entre 0.7 et 0.9 mais un filtrage propre n'est vraiment possible que pour $\alpha = 0.8$. La figure 3.9 montre le signal temporel reconstruit après filtrage dans les domaines fractionnaires $\alpha = 0.8$ et $\alpha = 0.7$. Le bruit est encore présent dans le premier cas, ce qui était prévisible compte tenu de l'allure de la FRT à l'ordre 0.7, mais n'apparaît plus quand $\alpha = 0.8$.

Enfin, la figure 3.10 donne la nouvelle distribution temps fréquence du signal après filtrage. Celle-ci présente l'intérêt de montrer un artefact du filtrage dans le domaine fractionnaire. Nous avons en effet filtré de manière brute en prenant une forme de filtre rectangulaire. Sur la distribution temps fréquence du signal apparaît alors l'effet de bord dû au filtre, c'est-à-dire

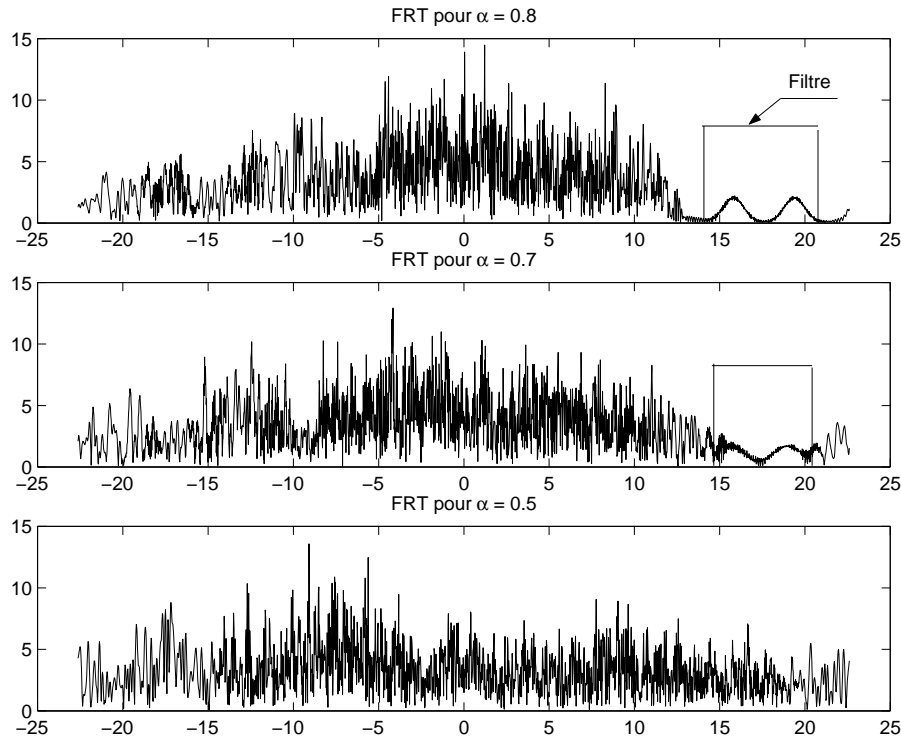


FIG. 3.8 – Allure des transformées fractionnaires aux ordres $\alpha = 0.8$ et $\alpha = 0.7$

deux bandes formant un angle ϕ par rapport à l'axe des fréquences. Ceci permet aussi la mise en évidence des problèmes de repliement du filtre fractionnaire. La bande supérieure se replie quand elle atteint $\frac{F_c}{2}$ et la partie du signal (du bruit dans notre cas) située au-dessus de cette *bande repliée* n'est plus filtrée. C'est à cause de ce phénomène qu'il subsiste un peu de bruit après le filtrage.

Il est aussi possible, toujours dans le domaine fractionnaire $\alpha = 0.8$ de séparer les deux sinus l'un de l'autre. Il faut pour cela filtrer dans la figure 3.8 un seul des deux lobes correspondant aux deux sinus. Il ne reste alors qu'un sinus modulés par une gaussienne. Le filtrage dans les domaines fractionnaires a encore d'autres applications, qui ne sont pas traitées ici. En repartant par exemple de la FRT à l'ordre 0.8, il est possible de ne filtrer qu'un seul des deux sinus puis de le démoduler de la gaussienne en réeffectuant une FRT (un exemple similaire est donné dans [4]).

3.4.2 Analyse des sinus glissants

Le sinus glissant est un signal dont la fréquence varie linéairement au cours du temps. Sa représentation temporelle a pour équation :

$$\mathcal{C}(t) = e^{i(\omega_0 t + \tan \phi t^2)} \quad (3.38)$$

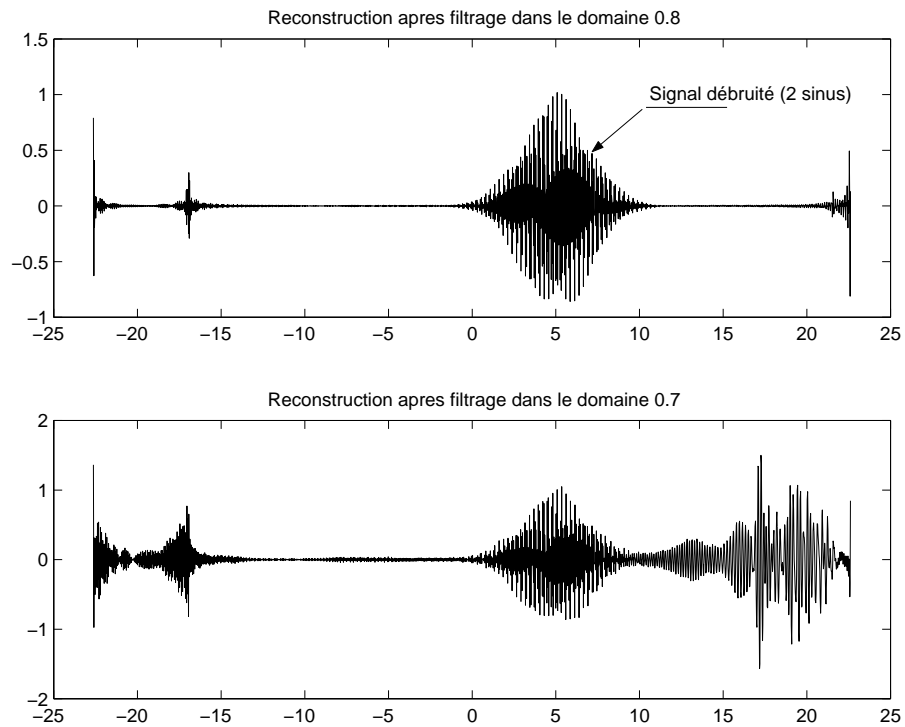


FIG. 3.9 – Reconstruction du signal après filtrage dans les domaines $\alpha = 0.8$ et $\alpha = 0.7$

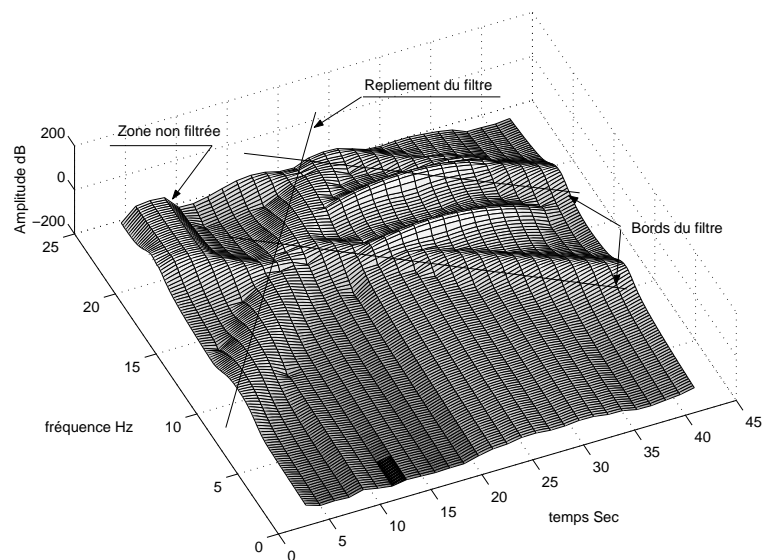


FIG. 3.10 – Distribution Temps fréquence du signal obtenu après filtrage

Dans le plan Temps-Fréquence sa représentation n'est autre qu'une droite dont la fréquence instantanée est ω_0 à l'origine des temps et qui forme un angle ϕ par rapport à l'axe temporel. L'idée est alors d'effectuer la transformée à l'angle $\phi + \frac{\pi}{2}$ (ordre $\alpha + 1$) afin de ne récupérer qu'un point lors de la projection.

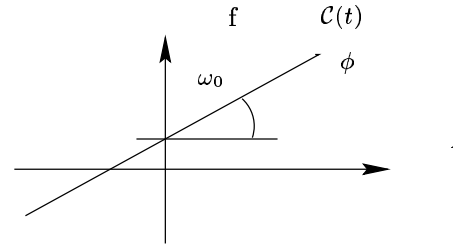


FIG. 3.11 – Représentation Temps-Fréquence d'un chirp

Calcul théorique

Nous allons vérifier ici la proposition du paragraphe précédent, à savoir que la transformée d'un sinus glissant suivant l'angle $\phi + \frac{\pi}{2}$ est un Dirac. La FRT du chirp s'écrit :

$$\mathcal{C}_{\alpha+1}(t_{\alpha+1}) = A_{\phi+\frac{\pi}{2}} e^{i\pi \cot(\phi+\frac{\pi}{2}) t_{\alpha+1}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi(\omega_0 t + \tan \phi t^2)} e^{i\pi(t^2 \cot(\phi+\frac{\pi}{2}) - \frac{2t_{\alpha+1}t}{\sin(\phi+\frac{\pi}{2})})} dt \quad (3.39)$$

Alors, comme $\sin(\phi + \frac{\pi}{2}) = \cos \phi$ et $\cot(\phi + \frac{\pi}{2}) = -\tan \phi$, les deux termes quadratiques sous l'intégrale s'annulent et

$$\mathcal{C}_{\alpha+1}(t_{\alpha+1}) = A_{\phi+\frac{\pi}{2}} e^{i\pi \tan \phi t_{\alpha+1}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi(\frac{\omega_0}{2} - \frac{t_{\alpha+1}}{\cos \phi})t} dt. \quad (3.40)$$

En effectuant ensuite le changement de variable $t' = \frac{t}{\cos \phi} \rightarrow \cos \phi dt' = t$ on trouve une transformée de Fourier classique :

$$\mathcal{C}_{\alpha+1}(t_{\alpha+1}) = A_{\phi+\frac{\pi}{2}} \cos \phi e^{-i\pi \tan \phi t_{\alpha+1}^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi \frac{\omega_0 \cos \phi t'}{2}} e^{-2i\pi t_{\alpha+1} t'} dt'}_{\text{}} \quad (3.41)$$

La partie dans l'intégrale n'est autre que la TF de $e^{-2i\pi \frac{\omega_0 \cos \phi t'}{2}}$ qui vaut $\delta(t_{\alpha+1} - \frac{\omega_0 \cos \phi}{2})$ et l'équation (3.41) de la FRT d'un sinus glissant devient :

$$\boxed{\mathcal{C}_{\alpha+1}(t_{\alpha+1}) = A_{\phi+\frac{\pi}{2}} \cos \phi e^{-i\pi \tan \phi t_{\alpha+1}^2} \delta(t_{\alpha+1} - \frac{\omega_0 \cos \phi}{2}).} \quad (3.42)$$

La FRT d'un sinus glissant dans le cas théorique est donc une fonction qui ne prend qu'une seule valeur non nulle en $t_{\alpha+1} = \frac{\omega_0 \cos \phi}{2}$. Cette propriété permet lors de l'analyse de signaux composés de sinus glissants de détecter d'une part la pente de ces sinus et d'autre part la valeur de leur fréquence instantanée à l'origine (ω_0) qui est donnée par la position du Dirac sur l'axe fractionnaire.

Signal Fenêtré

Le problème qui se pose alors est de vérifier que la propriété (3.42) de détection des sinus glissants de longueur infinis reste valable lorsque les signaux sont fenêtrés comme c'est le cas en

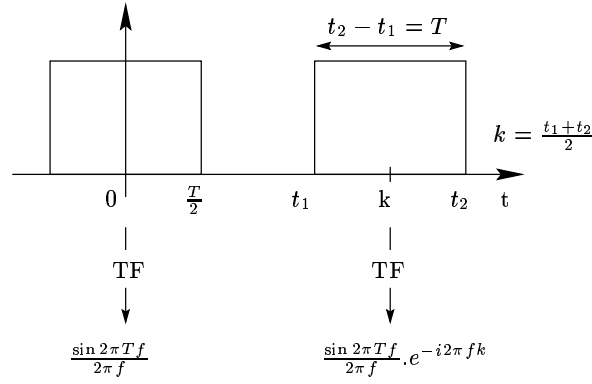


FIG. 3.12 – Effet de la position temporelle d'une porte sur sa TF

traitement du signal. L'effet d'une fenêtre $W(t)$ n'intervient pas pour l'annulation des formes quadratiques dans la FRT et l'équation (3.40) est inchangée (\mathcal{C} est uniquement multiplié par W). Par contre le changement de variable modifie la fenêtre en la dilatant. Enfin, de manière similaire à (3.41), la partie intégrale est la TF de $e^{-2i\pi \frac{\omega_0 \cos \phi}{2} t'} W(t)$, c'est-à-dire que le spectre de la fenêtre se trouve translaté de $\frac{\omega_0 \cos \phi}{2}$ en raison de la convolution par le Dirac.

Le calcul est présenté ici dans le cas d'une fenêtre rectangulaire (porte temporelle), mais les résultats obtenus s'étendent facilement aux autres formes de fenêtres. L'information sur la position temporelle de la porte se retrouve sur la phase de la TF. Celle-ci subit un déphasage linéaire proportionnel à la position du centre de la porte. La figure 3.12 illustre ce phénomène et donne les notations utilisées pour définir la porte.

Dans l'équation (3.41), en introduisant cette fois-ci la fenêtre et le même changement de variable, la TF devient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi \frac{\omega_0 \cos \phi}{2} t'} \cdot 1_{[t'_1, t'_2]}(t') \cdot e^{-2i\pi t_{\alpha+1} t'} dt' = \left[\delta \left(t_{\alpha+1} - \frac{\omega_0 \cos \phi}{2} \right) * \left(\frac{\sin 2\pi T' t_{\alpha+1}}{2\pi t_{\alpha+1} \cdot e^{-i2\pi k' t_{\alpha+1}}} \right) \right]. \quad (3.43)$$

Où $t'_1 = \frac{t_1}{\cos \phi}$, $t'_2 = \frac{t_2}{\cos \phi}$, $T' = \frac{T}{\cos \phi}$, $k' = \frac{k}{\cos \phi}$.
Soit, finalement

$$\boxed{\mathcal{F}_{\alpha+1}[\mathcal{C}(t) \cdot W(t)](t_{\alpha+1}) = \underbrace{A_{\phi + \frac{\pi}{2}} \cdot \cos \phi \cdot \frac{\sin 2\pi T' (t_{\alpha+1} - \frac{\omega_0 \cos \phi}{2})}{2\pi (t_{\alpha+1} - \frac{\omega_0 \cos \phi}{2})}}_{\text{Module}} \underbrace{e^{-i\pi (t_{\alpha+1}^2 \tan \phi + (t_{\alpha+1} - \frac{\omega_0 \cos \phi}{2}) 2k')}}_{\text{Phase}}} \quad (3.44)$$

Exemple d'analyse de sinus glissants

L'équation (3.44) donne le résultat de base pour l'analyse des sinus glissants par FRT. La détection de sinus glissants mais aussi leur localisation sont donc possibles lors de l'analyse par FRT. L'analyse consiste en un balayage angulaire pour détecter la présence de sinus glissants. Les sinus cardinaux obtenus peuvent donner deux informations sur le signal. La première sur la pente du sinus glissant est déduite de l'angle auquel est effectuée la transformée. La seconde sur la longueur temporelle est déduite de l'étalement des lobes du sinus cardinal qui s'annulent en théorie tout les $\frac{\cos \phi}{T}$.

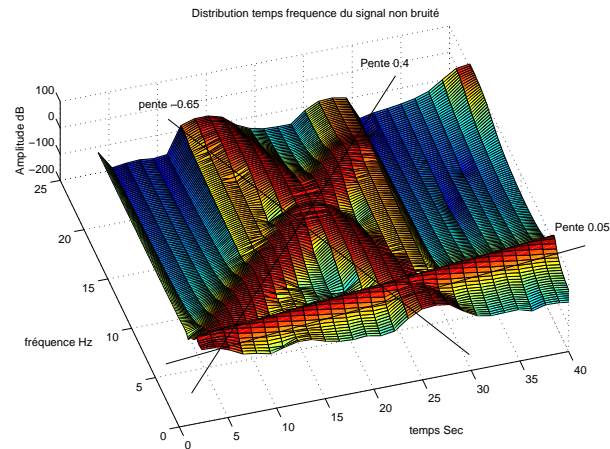


FIG. 3.13 – Distribution Temps fréquence mettant en évidence la présence de 3 sinus glissants

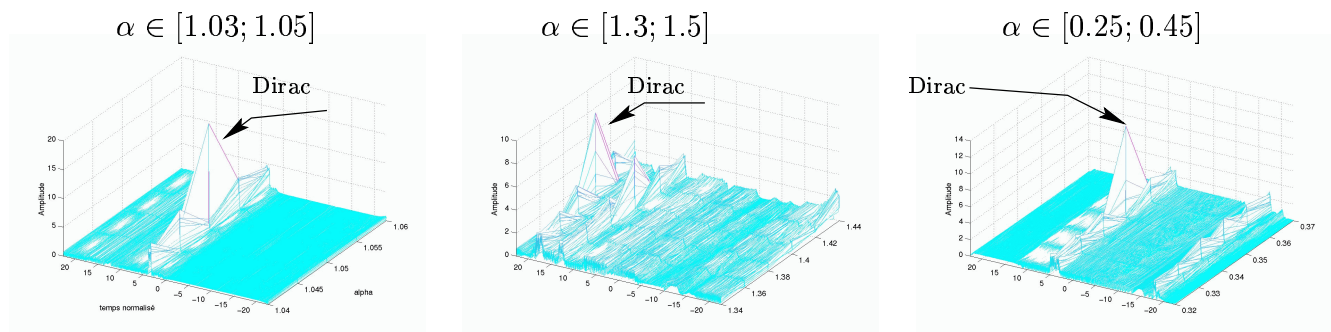


FIG. 3.14 – Détection des sinus glissants par balayage angulaire sur la FRT

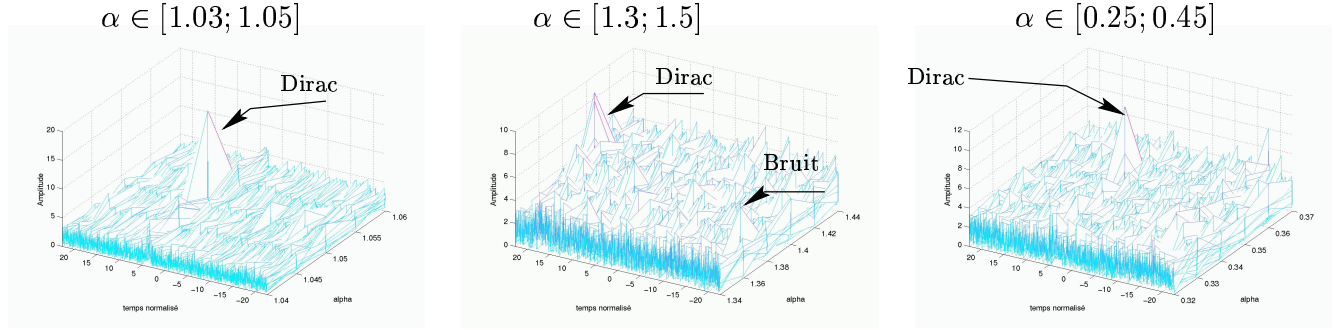


FIG. 3.15 – Détection des sinus glissants noyés dans le bruit par balayage angulaire sur la FRT

Enfin, il est possible d'obtenir la localisation temporelle du sinus glissant à partir de la phase de la transformée. Mais il faut pour cela dérouler la phase ce qui est une entreprise périlleuse dès que le signal est bruité. La phase attendue est une parabole dont le sommet situé en $t_{\alpha+1} = -\frac{2k}{\cos \phi} \frac{1}{2 \tan \phi} = -\frac{k}{\sin \phi}$ permet de déduire k qui indique la position du centre de la fenêtre. Le signal analysé consiste en trois sinus glissants de pentes et de longueurs différentes. Sa représentation temps fréquence est donnée à la figure 3.13. La figure suivante 3.14 met en évidence la présence des sinus cardinaux dans les zones angulaires correspondant aux pentes respectives des sinus glissants en l'absence de bruit.

Sur la figure 3.14, nous pouvons vérifier les résultats théoriques concernant la position des sinus cardinaux et aussi le fait que la longueur du sinus glissant influe sur l'amplitude du sinus cardinal. Les chirps n'interfèrent aucunement entre eux comme c'est le cas avec la WVD et il est possible d'isoler chaque sinus glissants en le filtrant dans le domaine orthogonal à sa pente.

Nous avons enfin testé la résistance au bruit de cette méthode de détection des sinus glissants en ajoutant un bruit blanc gaussien centré sur toute la longueur de la séquence. La méthode reste efficace pour des rapport signal sur bruit assez faible. La figure 3.15 est similaire à la figure 3.14 mais cette fois-ci le RSB est de -10 dB (le bruit est 4 fois plus fort que le signal). Le sinus glissant le plus court commence à être noyé dans le bruit mais les deux autres se distinguent encore très nettement.

3.5 Extension à la transformée en échelle Fractionnaire

Suite à la démarche de Namias et au développement de la FRT sont apparues une multitude de transformées fractionnaires souvent basées sur une relation entre la transformée et la TF. La démarche consiste alors à étendre cette relation entre la TF et la transformée aux domaines fractionnaires. Ainsi, il existe maintenant des transformées fractionnaires Radon [7] et de Gabor [9], une transformée en paquets d'ondelettes fractionnaires [10], des filtres de Wiener fractionnaires [11] et des fonctions de correlations fractionnaires [12].

3.5.1 Présentation de la transformée en échelle

La transformée en échelle (TE), à ne pas confondre avec les transformées temps-échelle, est une transformée similaire à la TF classique mais qui dilate l'axe des temps de manière

exponentielle. La transformée en échelle est donc aux dilatations ce que la transformée de Fourier est aux translations. L'opérateur échelle est noté \mathcal{E} et la transformée en échelle d'un signal S est notée \mathcal{E}_S . L'opérateur et son inverse prennent alors la forme intégrale :

$$\mathcal{E}_S(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ic \ln t}}{\sqrt{t}} S(t) dt \quad \text{et} \quad S(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{ic \ln t}}{\sqrt{t}} \mathcal{E}_S(c) dc \quad (3.45)$$

La fonction noyau de la TE, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ic \ln t}}{\sqrt{t}}$ est la même que celle de la TF après avoir effectué le changement de variable $t' = \ln t$. De cette constatation se déduit la relation liant la TF et la TE, à savoir que :

La transformée de Fourier de $S(e^t)e^{\frac{t}{2}}$ est la transformée en échelle de $S(t)$, et réciproquement la transformée en échelle de $\frac{S(\ln t)}{\sqrt{t}}$ est la transformée de Fourier de $S(t)$.

Ce résultat permet premièrement d'établir une liste des transformées en échelle simples obtenues à partir des TF de signaux usuels par simple changement de variable.

$S(t)$	$\mathcal{E}_S(c)$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ic_0 \ln t}}{\sqrt{t}}$	$\delta(c - c_0)$
$\frac{2 \sin(c_0 \ln t)}{\sqrt{2\pi} \sqrt{t} \ln t}$	$1_{[-c_0; c_0]}$
$1_{[t_1; t_2]}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{t_2} e^{ic_0 \ln t_2} - \sqrt{t_1} e^{ic_0 \ln t_1}}{\frac{1}{2} - ic}$
$\delta(t - t_0)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{ic_0 \ln t_0}}{\sqrt{t_0}} \right]$

3.5.2 Proposition pour la transformée en Echelle Fractionnaire

Pour générer la transformée en échelle fractionnaire nous utilisons le résultat liant la TE à la TF. Aucune démonstration n'est faite ici et la proposition ne repose que sur la continuité de l'opérateur de la FRT qui rejoint la TF pour la valeur $\frac{\pi}{2}$. Nous proposons donc la définition suivante pour la transformée en échelle fractionnaire :

La transformée en échelle fractionnaire de $S(t)$ est la transformée de Fourier fractionnaire de $S(e^t)e^{\frac{t}{2}}$.

En notant \mathcal{E}_α l'opérateur échelle fractionnaire, il vient :

$$\mathcal{E}_\alpha[S(t)](t_\alpha) = A_\phi \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{K}_\alpha(t_\alpha, t) S(e^t) e^{\frac{t}{2}} dt \quad (3.46)$$

Cette relation peut se simplifier en effectuant le changement de variable $x' = e^t$ et donc $dt = \frac{dx'}{x'}$:

$$\mathcal{E}_\alpha[S(t)](t_\alpha) = A_\phi e^{\frac{i}{2} t_\alpha^2 \cot \phi} \int_0^{+\infty} S(x') e^{\frac{\ln x'}{2}} e^{\frac{i}{2} \ln^2 x' \cot \phi - \frac{2t_\alpha \ln x'}{\sin \phi}} \frac{dx'}{x'} \quad (3.47)$$

Soit finalement :

$$\mathcal{E}_\alpha[S(t)](t_\alpha) = A_\phi e^{\frac{i}{2}t_\alpha^2 \cot \phi} \int_0^{+\infty} \frac{S(x')}{\sqrt{x'}} e^{\frac{i}{2} \ln^2 x' \cot \phi - \frac{2x'}{\sin \phi}} dx'. \quad (3.48)$$

Il est enfin possible de réécrire cette formule en utilisant la formule (3.33) qui a servi à développer l'implémentation rapide de l'algorithme. Alors,

$$\mathcal{E}_\alpha[S(t)](t_\alpha) = A_\phi e^{-\frac{i}{2}t_\alpha^2 \tan \frac{\phi}{2}} \int_0^{+\infty} S(x') \cdot \underbrace{\frac{e^{-\frac{i}{2}(\ln x')^2 \tan \frac{\phi}{2}}}{\sqrt{x'}}}_{\text{partie convoluée}} e^{\frac{i}{2 \sin \phi} (x' - \ln x')^2} dx'. \quad (3.49)$$

Dans cette dernière relation, le signal est multiplié par une fonction dans le domaine *dilaté* (partie soulignée), puis convolué (partie convoluée) et enfin remultipliée par un sinus glissant dans le domaine fractionnaire. La démarche est donc très proche de celle utilisée pour la FRT.

Chapitre 4

Autres domaines d'applications

4.1 Traitement du signal

La FRT trouve en traitement du signal une foule d'applications autres que le filtrage ou la détection de sinus glissants. Elle est beaucoup utilisée en traitement d'image [13] où elle permet d'obtenir des taux de compressions assez élevés à moindre coût (ceci est généralisable à d'autres types de données comme la parole par exemple). Il faut pour cela utiliser les représentations conjointes de FRT qui n'ont pas du tout été abordées dans ce rapport. Elle sert en filtrage à définir de manière simple des filtres d'analyse variant dans le temps où des filtres à fréquences variables [14, 15, 3]. Enfin des recherches sont en cours en vue d'appliquer la FRT aux problèmes de détection de signaux divers, d'extraction de phase, d'antenne radar et de tomographie.

4.2 De l'Optique à l'Acoustique

Comme il a été expliqué au paragraphe 3.2.3, la FRT est réalisable optiquement par propagation entre deux lentilles. Il était déjà possible d'observer la TF d'un faisceau lumineux en le passant dans un prisme, et bien il est maintenant possible d'observer sa FRT en le propageant entre deux lentilles. L'angle dépend de l'espace inter-lentilles et de la largeur de chaque lentille.

La FRT permet aussi dans le domaine optique de décrire les phénomènes de propagation dans une classe assez générale de systèmes optiques. Les équations de propagation sont souvent compliquées quand elles sont exprimées en termes d'intégrales de diffraction de Fresnel. Elles se trouvent grandement simplifiées par la FRT ce qui permet de mieux caractériser les milieux de propagation des systèmes optiques, mais aussi d'obtenir des simulations numériques plus efficaces. Les références les plus complètes sur l'analyse des problèmes optiques par FRT sont données dans l'article de M. Haldun Ozaktas [15] qui travaille lui-même sur le sujet.

Compte tenu des similarités entre les propagations optiques et acoustiques, il est probable que la FRT permette de caractériser les phénomènes de propagation de manière plus *simple* que les fonctions de Green. La résolution de certaines équations de l'acoustique non linéaire est elle aussi envisageable à l'aide de la FRT, et des simulations de propagation dans les domaines fractionnaires pourraient sans doute éclairer quelques problèmes encore obscurs. Enfin, tout comme la TF discrète d'une onde acoustique est réalisable de manière mécanique en envoyant l'onde sur un réseau de fils de fréquences fondamentales différentes, nous pouvons imaginer qu'il sera de même possible d'effectuer la FRT de l'onde à l'aide d'un réseau modifié (le

fait d'ajouter des masselottes sur les fils pourrait induire l'effet fractionnaire, la position des masselottes fixant l'ordre de la FRT).

4.3 Autres domaines

Il existe encore bien d'autres domaines de recherche où la FRT a été appliquée avec succès. La première application de la FRT fut celle proposée par Namias [1] en recherche fondamentale pour la résolution de certaines équations différentielles non linéaires de la mécanique quantique (ce qui rejoint d'ailleurs l'optique quantique). Même si elle semble plus se développer dans le domaine du traitement du signal, il ne faut pas perdre de vue qu'elle présente un grand intérêt pour le calcul analytique car si les calculs ne sont pas toujours triviaux, il est par contre facile d'avoir recours aux simulations numériques des FRT.

Enfin, une application intéressante de la FRT aux réseaux de neurones est en train d'être développée par Lee et Szu [16] pour la reconnaissance adaptative de patrons en vue de leur apprentissage au réseau.

Chapitre 5

Conclusion

Tout au long de ce rapport, nous avons montré l'efficacité de la transformée de Fourier fractionnaire face à des problèmes aussi divers que la résolution d'équations différentielles ou l'analyse et le filtrage en traitement du signal. La complexité de l'algorithme en $O(N \log N)$ et les possibilités de reconstruction de la WVD par tomographie en font un outil d'analyse temps-fréquence rapide et puissant.

Les exemples traités ne portent pour l'instant que sur des signaux de simulations mais les méthodes et algorithmes développés pour la détection de sinus glissants sont tout à fait applicables à des signaux expérimentaux. Il serait par exemple intéressant d'analyser les signaux Doppler en vue de détecter la partie assimilable à un sinus glissant pour en déduire la vitesse de l'objet en mouvement. Dans les algorithmes de détection proposés, il manque encore toute la partie portant sur l'analyse propre de la phase. Ceci a en effet été ébauché mais les problèmes de déroulement de phase nous ont très vite freiné dans la localisation temporelle du sinus glissant.

Le principe de filtrage des signaux offre lui aussi des perspectives nouvelles en comparaison au filtrage dans les domaines temporels et fréquentiels. Toutefois, pour le filtrage et pour la détection de sinus glissants, il serait élégant de mettre au point une méthode de transformée de Fourier fractionnaire à court terme (FRTCT) pour pouvoir analyser de longues séquences temporelles. Toujours sur l'exemple du signal Doppler, une analyse par fenêtre glissante permettrait de se caler uniquement sur la partie *linéaire* et d'en trouver la pente à moindre coût. La difficulté pour la mise en place de cette "FRTCT" réside dans la normalisation des unités de la fenêtre d'analyse par rapport au signal global.

Enfin, en ce qui concerne la transformée en échelle fractionnaire, seule une proposition de définition est donnée. Il est cependant possible d'implémenter un algorithme de TEF calqué sur celui de la FRT mais il faut tenir compte pour discrétiser l'opérateur d'un théorème d'échantillonnage stipulant que les échantillons de la TE doivent être espacés exponentiellement, ce qui complique grandement la normalisation des unités.

Annexe A

Transformées des signaux usuels

A.1 FRT des fonctions propres $e^{-\frac{x^2}{2}}\mathcal{H}_n(x)$

Les figures A.1 à A.3 illustrent l'invariance du module des FRT des fonctions propres. La zone angulaire analysée est $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. La visualisation de la partie réelle des FRT permet aussi de mettre en évidence la modulation induite par les valeurs propres $e^{in\phi}$. Quand le degré n de la fonction propre augmente, il en découle que la partie réelle de sa transformée est modulée par une période de sinus supplémentaire ($\frac{1}{4}$ de période en plus sur la zone d'observation).

A.2 FRT du sinus et du cosinus

Les figures A.4 et A.5 représentent les modules et parties réelles des FRT des fonctions sinus et cosinus. La fonction sinus est représentée sur la zone $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ de sorte que la formation des diracs soit nettement représentée. Il est à noter que le facteur A_ϕ induit sur la partie réelle un déphasage de π qui inverse donc les formes espérées, ce qui ne transparait aucunement sur le module. La FRT du cosinus est effectuée sur la zone $\phi \in [0, 1.8 \times \frac{\pi}{2}]$ pour voir le cosinus se reformer après être passé par un dirac en $\phi = \frac{\pi}{2}$.

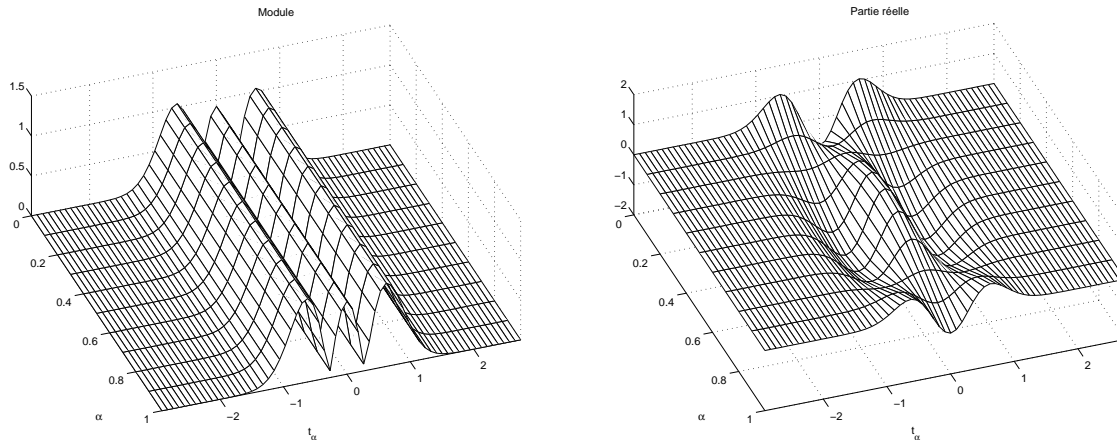
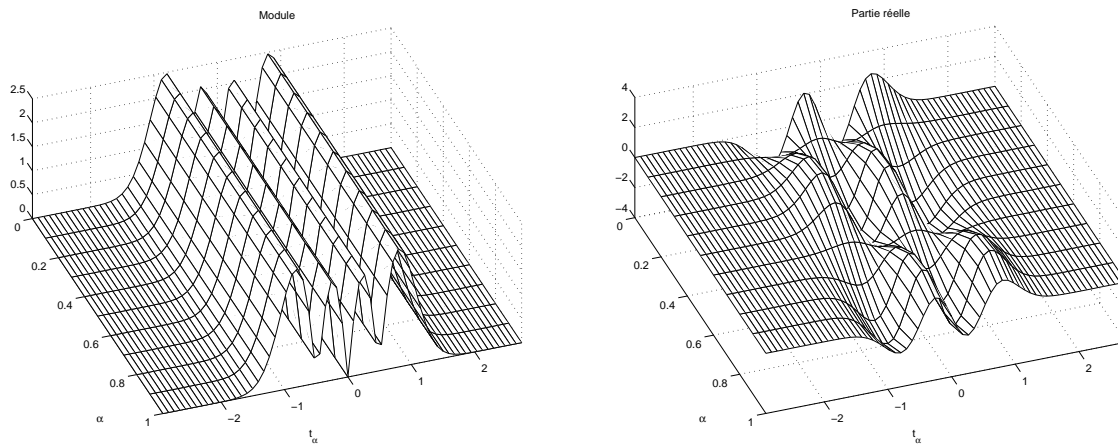
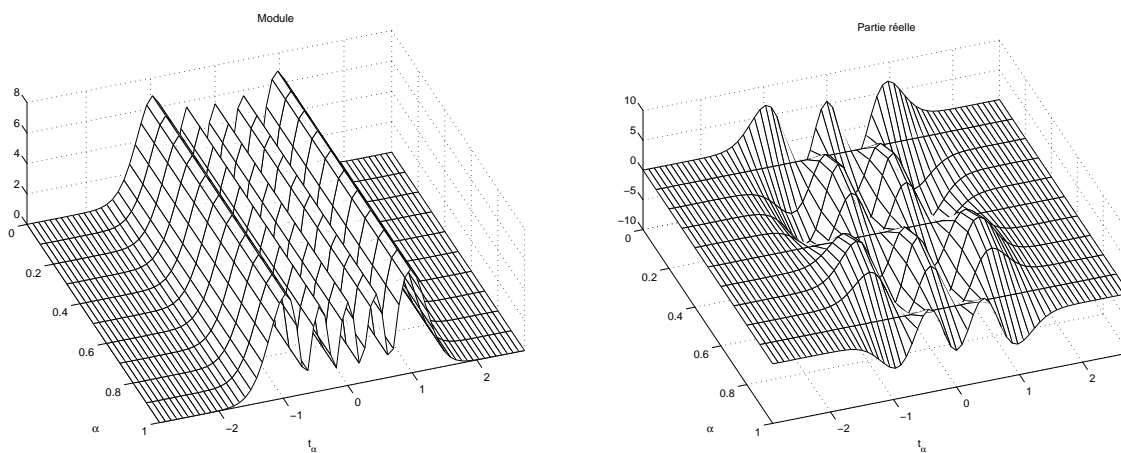
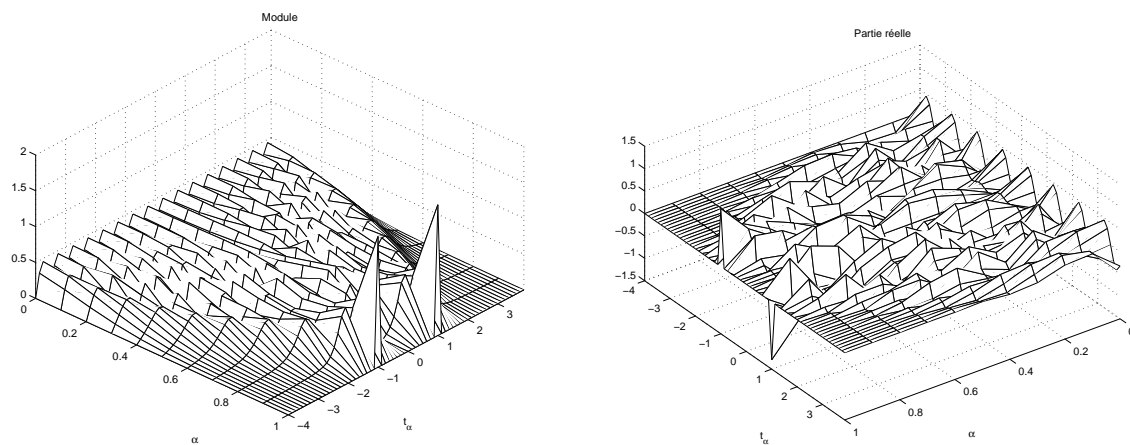
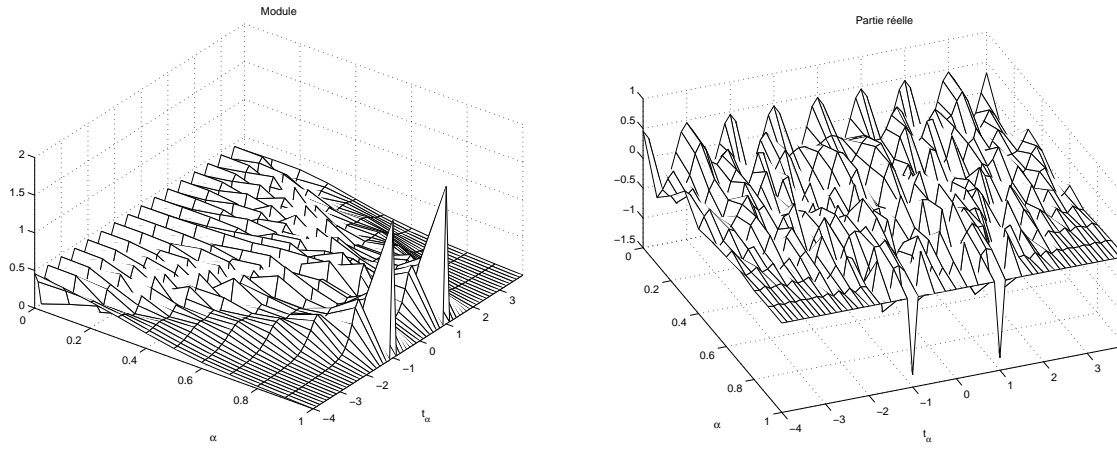
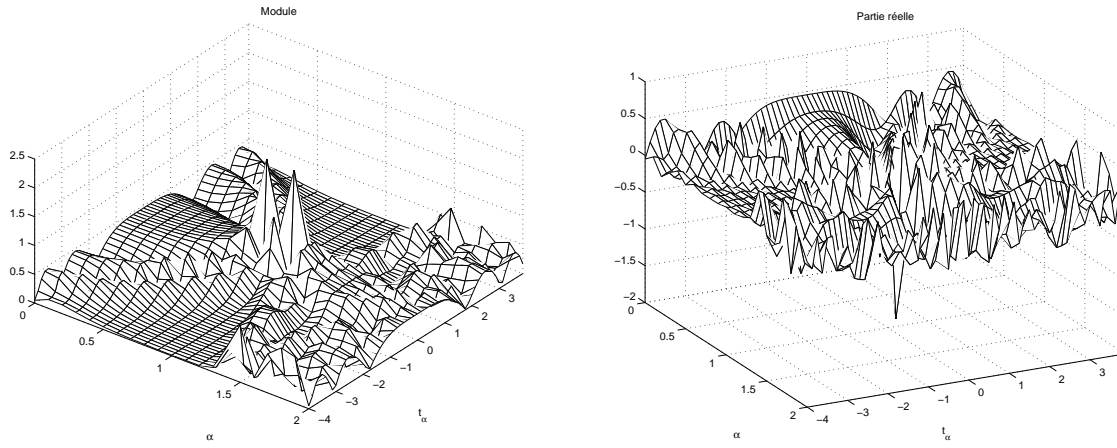


FIG. A.1 – FRT de $\mathcal{H}_2(\sqrt{2\pi}t_\alpha)e^{-\pi t_\alpha^2}$

FIG. A.2 – FRT de $\mathcal{H}_3(\sqrt{2\pi}t_\alpha)e^{-\pi t_\alpha^2}$ FIG. A.3 – FRT de $\mathcal{H}_4(\sqrt{2\pi}t_\alpha)e^{-\pi t_\alpha^2}$ FIG. A.4 – FRT d'un sinus pour des angles variant de 0 à $\frac{\pi}{2}$

FIG. A.5 – FRT d'un cosinus pour des angles variant de 0 à π FIG. A.6 – FRT d'un sinus glissant pour des angles variant de 0 à π

A.3 FRT d'un sinus glissant

La FRT du sinus glissant, donnée à la figure A.6, montre l'évolution du chirp dans la zone $\phi \in [0, \pi]$. Le passage par le Dirac est obtenu quand l'angle de la FRT coïncide avec la pente de glissement du sinus plus $\frac{\pi}{2}$.

A.4 FRT d'une porte

La FRT de la porte, présentée à la section 3.3.1 est montrée à la figure A.7 sur une zone plus vaste $\phi \in [0, \pi]$ afin de voir la porte se reformer dans le domaine $\phi = \pi$. Là encore, le déphasage induit par A_ϕ apparaît.

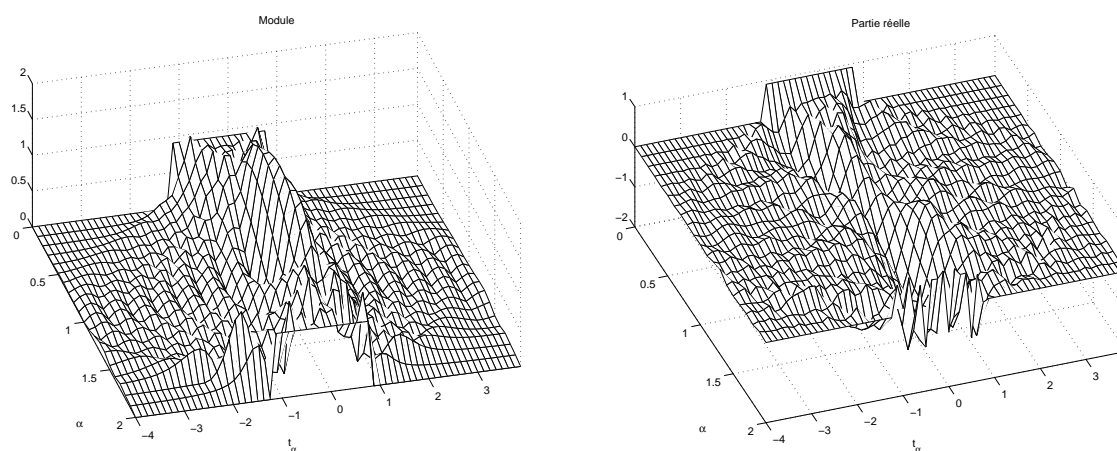


FIG. A.7 – FRT d'une porte pour des angles variant de 0 à π

Annexe B

Exemple de résolution analytique d'une équation différentielle par FRT

Le fait de transformer une équation par FRT ajoute un degré de liberté à cette équation en laissant le choix de l'angle de transformée. Ceci offre souvent la possibilité de réduire d'au moins un le degré l'équation. Nous nous proposons d'illustrer ici ce phénomène sur une équation complexe d'oscillateur :

$$u''(x) + b^2 x^2 u(x) = 0, \quad b > 0. \quad (\text{B.1})$$

Il faut alors utiliser les relations (2.15) et (2.13) de la section 2.2 pour transformer (B.1) qui devient, en notant $g = \mathcal{F}_\phi u$:

$$(\cos^2 \phi - b^2 \sin^2 \phi) g''(y) - i y (1 + b^2) \sin 2\phi g'(y) + [y^2 (b^2 \cos^2 \phi - \sin^2 \phi) - i (1 + b^2) \sin \phi \cos \phi] g(y) = 0. \quad (\text{B.2})$$

L'angle ϕ n'est pas encore fixé et pour supprimer le terme en g'' il faut poser $\phi = \cot \frac{1}{b}$. L'équation (B.2) se simplifie alors grandement et devient :

$$2i b y g'(y) = [y^2 (b^2 - 1) - i b] g(y), \quad (\text{B.3})$$

Cette équation se résout plus *classiquement* et donne

$$g(y) = \frac{C}{\sqrt{|x|}} e^{-\frac{i x^2 (b^2 - 1)}{4b}}, \quad \text{où } C \text{ est une constante} \quad (\text{B.4})$$

Nous avons ainsi la solution analytique de l'équation (B.1), mais dans le domaine fractionnaire. Il faut encore effectuer la transformée inverse pour obtenir les solutions dans le domaine temporel. C'est cette partie qui pose le plus de problèmes car le calcul intégral est souvent loin d'être trivial. La transformation de $g(y)$ est ici possible et les solutions temporelles prennent

la forme :

$$\begin{aligned}
u(x) &= C e^{\frac{i}{2}bx^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{|y|} e^{-ixy\sqrt{1+b^2} + \frac{iby^2}{2} - \frac{iby^2}{4} + \frac{iby^2}{4b}} dy, \\
&= C e^{\frac{i}{2}bx^2} \int_0^{+\infty} \sqrt{|y|} \cos[xy\sqrt{1+b^2}] + e^{\frac{iy^2(1+b^2)}{4b}} dy, \\
&= C e^{\frac{i}{2}bx^2} \int_0^{+\infty} \cos(xw^2) e^{\frac{iw^4}{4b}} dw, \\
&= C \sqrt{|x|} J_{-1/4} \left(\frac{bx^2}{2} \right), \quad C \in \mathbb{C}
\end{aligned} \tag{B.5}$$

La dernière intégrale est obtenue par la formule donnée par Gradshteyn [*Table of Integrals, Series and Products, corrected and enlarged edition*, Academic Press] :

$$\int_0^{+\infty} \cos(\beta w^2) e^{i\alpha w^4} dw = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{|\beta|}{2\alpha}} e^{\frac{i\pi}{8} - \frac{i\beta^2}{8\alpha}} J_{-1/4} \left(\frac{\beta^2}{8\alpha} \right), \quad \alpha > 0. \tag{B.6}$$

Le choix de l'angle a permis d'obtenir une famille de fonctions solution de l'équation et le choix d'un autre angle conduirait à une autre famille de solutions, pas toujours indépendante de la première. Afin de générer la solution générale de l'équation, il faut deux familles de solutions indépendantes. La deuxième famille est obtenue de manière similaire à la première en prenant l'angle complémentaire à ϕ vérifiant lui aussi la réduction d'ordre. La seconde famille est

$$u_2(x) = C \sqrt{|x|} J_{1/4} \left(\frac{bx^2}{2} \right) \operatorname{sgn}(x), \quad C \in \mathbb{C} \tag{B.7}$$

Ainsi, l'indépendance est assurée par les fonctions de Bessel $J_{-1/4}$ et $J_{1/4}$, et la solution générale de l'équation s'écrit :

$$\boxed{u(x) = A \sqrt{|x|} J_{-1/4} \left(\frac{bx^2}{2} \right) + B \sqrt{|x|} J_{1/4} \left(\frac{bx^2}{2} \right) \operatorname{sgn}(x), \quad A, B \in \mathbb{C}} \tag{B.8}$$

Annexe C

Listing des programmes

C.1 Algorithmes et fonctions

Algorithme basé sur la FFT

```
function frt_x=frt(x,a)

%-----
%      TF fractionnaire (FRT) de la sequence x
%
% Parametres d'appel :
%      frt_x=frt(x,a)
%
%      x      signal a analyser
%      a  Ordre de la FRT (entre 0 et 1)
%          0 -> 0      1 -> pi/2
%-----

% Test des parametres d'entree
if nargin ~= 2
    disp('mauvais nombre d entree')
end

siz = size(x);
N=length(x); %taille de la sequence temporelle

% Angle de la frt
phi=a*pi/2;

f_norm = sqrt(N);

% Axes de temps
t = (-N/2:N/2-1)*1/f_norm;      % temps normal: N
```

```

% on s'assure que x est un vecteur ligne
if siz(1,1)>siz(1,2)
    x=x';
end

%-----
%                               1 ere etape
% Multiplication par un chirp (facteur de phase)
%-----

%----- definition du facteur de phase-----
e_1 = exp(-j*(pi)*tan(phi/2)*t.^2);

x_int1 = x.*e_1;

%-----
%                               2 eme etape
% Multiplication par un facteur de phase dans Fourier
%-----

tfx_int1 = fft(x_int1);

%----- definition du facteur de phase-----

e_2 = exp(-j*(pi)*sin(phi)*t.^2);

%--- Decalage du chirp par rapport a l'origine ---
e_dec = [ e_2(N/2+1:N) e_2(1:N/2)];
% de      0 a N/2-1      -N/2 a -1

tfx_int2 = tfx_int1 .* e_dec;
x_int2 = ifft(tfx_int2);

%-----
%                               3 eme etape
%                               Nouvelle multiplication par e_1
%-----

x_a = x_int2.*e_1;

%-----
%                               Normalisation du resultat
%-----
fact = exp(-j*pi/4*sign(sin(phi))-j*phi/2-pi/4);
ftr_x = x_a*fact;

```

Algorithme basé sur la convolution

```

function frt_x=frt2(x,fe,t,alpha)

% -----
%           TF fractionnaire (FRT) de la sequence x
%
% Parametres d'appel :
%           frt_x=frt2(x,fe,t,alpha)
%
%   x           signal a analyser
%   Fe          freq d'echantillonnage
%   t           Vecteur temporel utilise pour x
%   alpha       Ordre de la FRT (entre 0 et 1)
%               0 -> 0      1 -> pi/2
% -----

% Test des parametres d'entree
if nargin ~= 4
    disp('mauvais nombre d entree')
end

siz = size(x);
N=max(siz); %taille de la sequence temporelle

phi=alpha*pi/2; %angle de la frt

% on s'assure que x est un vecteur ligne
if siz(1,1)>siz(1,2)
    x=x';
end

% -----
%               1 ere etape
%               interpolation du signal (lineaire)
% -----

% Reconstitution d'une matrice de taille 2N-1
x_2 = [x(1)];
t_2 = [t(1)];
for k=2:N
    x_2 = [ x_2      ((x(k)-x(k-1))/2)      x(k)  ];
%           vect      nouveau terme      ancien
    t_2 = [ t_2      ((t(k)-t(k-1))/2)      t(k)  ];
end

```

```

%-----
%                               2 eme etape
%                               Somme discrete
%-----

% Facteurs constants
    beta = 1/sin(phi);
    A_phi = exp(-i*(pi*sign(sin(phi))/4-phi/2))/sqrt(abs(sin(phi)));

% Facteur intermediaire
f_int = exp(i*pi*(alpha-beta)*t_2.^2);

frt_x2 = [];
for k=1:2*N-1
    frt_x2 = [ frt_x2 (f_int(k)*sum(exp(i*pi*beta*(t_2(k)-t_2).^2).*f_int.*x_2))];
end

%-----
%       decimation du signal
%-----

frt_x = frt_x2(1:2:2*N-1);

```

Un algorithme de Transformée de Fourier à court terme

```

function [tp_freq]=tfct(x,fe,L,fmin,fmax,recouv)

%-----
%      Fonction representation temps frequence
%
% Parametres d'appel :
%      [tp_freq]=tfct(x,fe,L,fmin,fmax,recouv)
%      x          signal a analyser
%      Fe          freq d'echantillonnage
%      L          longueur de la fenetre d'analyse
% Parametres optionnels :
%      Fmin,Fmax   plage de frequences d'observation
%                  valeurs par default [0;Fe/2]
%      Recouv      Poucentage de recouvrement des fenetres
%                  valeur par default 50%
%-----

% Test des parametres d'entree
if nargin ~= 6
    recouv = 50;
    if nargin ~= 5
        fmax = fe/2;
    end
    if nargin ~= 4
        fmin = 0;
    end
end

siz = size(x);
N=max(siz); %taille de la sequence temporelle
recouv = 1-recouv/100;
L = 2^nextpow2(L);

% on s'assure que x est un vecteur ligne
if siz(1,1)>siz(1,2)
    x=x';
end

%-----%
%      Analyse par fenetre glissante      %
%-----%

```



```

%----- definition de la fenetre -----%

% --- forme --- %
% fenetre de Hamming
fen = 0.5*(1-cos(2*pi*(0:L-1)/(L-1)));

% nombre de fenetres temporelles

n_fen= floor((N-L)/(recouv*L));

% --- construction des fft --- %

% repereage indiciel dans la matrice
ind_min = floor(fmin/fe * L)+1;
ind_max = floor(fmax/fe * L)+1;

% Vecteur d'indice de la zone frequentielle observee
f_obs = ind_min:ind_max;

% on recalcule des frequence
% presentes dans la matrice de fft

fmin=ind_min*fe/L;
fmax=ind_max*fe/L;

%----- tronquature du signal -----%

tp_freq = [];

for k=0:n_fen-1,
    % signal tronque de longueur L
    ind = L/2+k*floor(recouv*L);
    xt = x(ind-L/2+1:ind+L/2).*fen;
    tfxt = 20*log10(abs(fft(xt,L)));
    tp_freq = [ tp_freq (tfxt(f_obs))' ];
end

%-----%
%   Visualisation de la matrice temps frequence   %
%-----%

% ----- definition des axes ----- %

% -----Axe des temps de la matrice ----- %

```

```
t_mat=(L/2:floor(recouv*L):(n_fen-1)*recouv*L+L/2)*(1/fe);

%figure(1)
%plot(t,x);
%title('allure temporelle')

figure(2)
surf(t_mat,(fmin:fe/L:fmax),tp_freq);
view(-25,75)
title('representation temps frequence')
ylabel('frequence Hz')
xlabel('temps Sec')
zlabel('Amplitude dB')
```

Fonction effectuant le balayage angulaire sur FRT

```

function frtx = balai(x,debut,fin,pas)

%-----
% Appel par frtb = balai(x,deb,fin,pas)
% Fonction de balayage angulaire par FRT
% de la fonction x entre les ordres deb et fin
% renvoi la matrice contenant toute les FRT
% attention a la taille ( faire en plusieurs
% fois si necessaire)
%-----

N=length(x);
fe = sqrt(N);
t=(-N/2:N/2-1)*1/fe;

x_alpha = [];

alpha = debut:pas:fin;

for k = 1:length(alpha)
    frtx=frt(x,alpha(k));
    x_alpha = [x_alpha (abs(frtx))'];
end
size(alpha)
size(t)
size(x_alpha)
figure
mesh(alpha,t,abs((x_alpha)));
grid
view(70,60)
title('representation temps fractionnaire')
xlabel('alpha')
ylabel('temps normalis')
zlabel('Amplitude')
set(gca,'Ylim',[t(1) t(N)])

```

C.2 Programmes Tests sur la FRT

Filtrage des deux bandes de bruits et reconstruction du signal

```
%-----
% Simulation d'un signal a spectre decorrelable
%-----

N =2048;
fe = sqrt(N);

% axe des temps centre en zero
t = (-N/2:N/2-1)*(1/fe);

% Gaussienne
f0 = 15;
s = 5*(sin(2.5*pi*f0*t)+sin(2*pi*f0*t)).*exp(-pi* ((t-5)/5).^2);

% Bruit localise, filtre sur une plage de frequence

m1 = 1;
var1 = 20;
b1 = m1 + var1 * randn(1,N);
tfb1 = fft(b1);

% Indices de debut et longueur du filtre
debfilt1 = 64;
L_filt1 = 250;
tfb1 = [ zeros(1,debfilt1) tfb1(1,debfilt1+1:debfilt1+L_filt1)
         zeros(1,N/2-debfilt1-L_filt1)];

tfb1 = [ tfb1 fliplr(tfb1) ];

b1 = real(ifft(tfb1));

ind_fin1 = 2000;
b1 = [ b1(1:ind_fin1) zeros(1,N-ind_fin1)];

% Bruit localise, filtre sur une plage de frequence

m2 = 1;
var2 = 20;
b2 = m2 + var2 * randn(1,N);
tfb2 = fft(b2);
```

```

% Indices de debut et longueur du filtre
debfilt2 = 64;
L_filt2 = 700;
tfb2 = [ zeros(1,debfilt2) tfb2(1,debfilt2+1:debfilt2+L_filt2)
         zeros(1,N/2-debfilt2-L_filt2)];
tfb2 = [ tfb2 fliplr(tfb2) ];

b2 = real(ifft(tfb2));

ind_fin2 = 256;
b2 = [ b2(1:ind_fin2) zeros(1,N-ind_fin2)];

% Addition des signaux
x = s + b1 + b2;

ftx = tfct(x,fe,256,0,fe/2,75);

figure(3)
plot(t,x)
title('allure temporelle')

% Analyse par FRT
alpha1 = 0.8;
frtx1 = frt(x,alpha1);
alpha2 = 0.7;
frtx2 = frt(x,alpha2);
alpha3 = 0.5;
frtx3 = frt(x,alpha3);

figure(4)
subplot(3,1,1)
plot(abs(frtx1))
%title(['FRT a l''angle ' num2str(alpha1) ])
subplot(3,1,2)
plot(abs(frtx2))
%title(['FRT a l''angle ' num2str(alpha2) ])
subplot(3,1,3)
plot(abs(frtx3))
%title(['FRT a l''angle ' num2str(alpha3) ])

figure(5)
%filtrage dans le domaine 0.8
deb_f1 = 1650;
fin_f1 = 2000;
frtf1 = [ zeros(1,deb_f1-1) frtx1(deb_f1:fin_f1) zeros(1,N-fin_f1)];

```

```
ifrtf1 = frt(frtf1,-0.8);

subplot(2,1,1)
plot(t,real(ifrtf1))
title(['Reconstruction apres filtrage dans le domaine ' num2str(alpha1) ])

%filtrage dans le domaine 0.7
deb_f2 = 1550;
fin_f2 = 1970;
frtf2 = [ zeros(1,deb_f2-1) frtx2(deb_f2:fin_f2) zeros(1,N-fin_f2)];
ifrtf2 = frt(frtf2,-0.7);

subplot(2,1,2)
plot(t,real(ifrtf2))
title(['Reconstruction apres filtrage dans le domaine ' num2str(alpha2) ])
```

Détection des sinus glissants

```
%-----
%      Programme simulant plusieurs chirps.
%-----

N = 2048;
fe = sqrt(N);

% axe des temps centre en zero
%-----
t = (-N/2:N/2-1)*(1/fe);

% premier chirp
%-----
indeb1 = 20;
infin1 = 1200;
off1 = 30;
p1 = 0.4;
phi1 = p1*pi/2;
x1 = [zeros(1, indeb1 -1) (exp(i*pi*(off1*t(indeb1:infin1)+tan(phi1)
                                *t(indeb1:infin1).^2 ))) zeros(1,N-infin1)];

% Second chirp
%-----
indeb2 = 1;
infin2 = 2048;
off2 = 7;
p2 = 0.05;
phi2 = p2*pi/2;
x2 = [zeros(1, indeb2 -1) (exp(i*pi*(off2*t(indeb2:infin2)+tan(phi2)
                                *t(indeb2:infin2).^2 ))) zeros(1,N-infin2)];

% Troisieme chirp
%-----
indeb3 = 600;
infin3 = 2048;
off3 = 15;
p3 = -0.65;
phi3 = p3*pi/2;
x3 = [zeros(1, indeb3 -1) (exp(i*pi*(off3*t(indeb3:infin3)+tan(phi3)
                                *t(indeb3:infin3).^2 ))) zeros(1,N-infin3)];

%-----
```

```
% Ajout d'un bruit
%-----
m = 1;
var = 4;

b = m + var * randn(1,N);

%-----
% Signal
%-----
s = x1 +x2 + x3 + b;

tpf = tfct(s,fe,256,1,fe/2,75);

%-----
% analyse par FRT
%-----

%-----
% zone 0.03 0.07 (plus 1)
%-----
frtb1 = balai(s, 1.03, 1.07, 0.005);
%-----
% zone 0.4 0.5
%-----
frtb2 = balai(s, 1.3,1.5,0.01);
%-----
%zone -0.6 -0.7
%-----
frtb3 = balai(s,0.25,0.45,0.01);
```


Bibliographie

- [1] Victor Namias. The fractional order fourier transform and it's application to quantum mechanics. *J. Inst. Maths Applies*, (25) :241–265, January 1980.
- [2] A. C. McBride and F. H. Kerr. On namias's fractional fourier transform. *IMA Journal of Applied Mathematics*, (39) :159–175, August 1987.
- [3] Luís B. Almeida. The fractional fourier transform and time-frequency representations. *IEEE Transaction on signal processing*, 42(11) :3084–3091, November 1994.
- [4] Ozaktas, Arikan, Kutay, and Bozdăg. Digital computation of the fractional fourier transform. *IEEE Transaction on signal processing*, 44(9) :2141–2150, September 1994.
- [5] J. García, D. Mas, and R. G. Dorsch. Fractional-fourier-transform calculation through the fast-fourier-transform algorithm. *Applied Optics*, 35(35) :7013–7018, December 1996.
- [6] J. C. Wood and D. T. Barry. Radon transformation of time-frequency distributions for analysis of multicomponent signals. *IEEE Transaction on signal processing*, 42(11) :3166–3177, November 1994.
- [7] Zeev Zalevsky and David Mendlovic. Fractional radon transform : definition. *Applied Optics*, 35(23) :4628–4631, August 1996.
- [8] Germain Chartier. *Manuel d'Optique*. Hermes, 1994.
- [9] Yan Zhang, Ben-Yuan Gu, Bi-Zhen Dong, and Guo-Zhen Yang. Fractional gabor transform. *Optics Letters*, 22(21) :1583–1585, nov 1997.
- [10] Ying Huang and Bruce Suter. Fractional wave packet transform. *IEEE Digital Signal Processing Workshop*, pages 413–415, 1996.
- [11] Zeev Zalevsky and David Mendlovic. Fractional wiener filter. *Applied Optics*, 35(20) :3930–3936, July 1996.
- [12] David Mendlovic, Haldun Ozaktas, and Adolf W. Lohmann. Fractional correlation. *Applied Optics*, 34(2) :303–309, January 1995.
- [13] L.M. Bernardo and O.D.D. Soares. Fractional fourier transforms and imaging. *J. Opt. Soc. Amer. A*, 11 :2622–2626, 1994.
- [14] Kutay, Ozaktas, Arikan, and Onural. Optimal filtering in fractional fourier domains. *IEEE Transaction on signal processing*, 45(5) :1129–1143, May 1997.
- [15] H. M. Ozaktas and Orhan Aytür. Fractional fourier domains. *Signal Processing*, (46) :119–124, May 1995.
- [16] S.Y. Lee and H. H. Szu. Fractional fourier transforms, wavelet transforms and adaptative neural networks. *Opt. Eng.*, 33 :2326–2330, 1994.
- [17] L. B. Almeida. Product and convolution theorems for the fractional fourier transform. *IEEE Signal Processing Letters*, 4(1) :15–17, January 1997.

- [18] Patrick Flandrin. *Temps Fréquence*. Hermes, 1992.
- [19] Ahmed I. Zayed. A convolution and product for the fractional fourier transform. *IEEE Signal Processing Letters*, 5(4) :101–103, April 1998.
- [20] Soo-Chang Pei and Min-Hung Yeh. Improved discrete fractional fourier transform. *Optics Letters*, 22(14) :1047–1049, July 1997.
- [21] Jianwen Hua, Liren Liu, and Guoqiang Li. Extended fractional fourier transforms. *J. Opt. Soc. Am. A*, 14(12) :3316–3322, December 1997.
- [22] L. Alieva. On the self-fractional fourier functions. *J. Phys. A. Math. Gen.*, (29) :L377–L379, May 1996.
- [23] G. S. Agarwal and R. Simon. A simple realization of fractional fourier transform and relation to harmonic oscillator green’s function. *Optics Communication*, (110) :23–26, August 1994.